THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE

DE GRENOBLE

par

El Arbi ZAIEM

OPERATEURS DE CONVOLUTION D'IMAGE FERMEE

Soutenue le 8 mai 1973 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY Président

A. BERNARD

J.P. BERTRANDIAS

Examinateurs

THÈSE

DE DOCTORAT DE TROISIÈME CYCLE DE MATHÉMATIQUES PURES

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
DE GRENOBLE

par

El Arbi ZAIEM

OPERATEURS DE CONVOLUTION D'IMAGE FERMEE

Soutenue le 8 mai 1973 devant la Commission d'examen

C. CHABAUTY Président

A. BERNARD
J. P. BERTRANDIAS
Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

SOMMAIRE

Pages

INTRODUCTION

CHAPITRE I

A - L'algèbre des mesures sur un groupe abélien..... 1

B - Mesures idempotentes sur un groupe abélien - Théorème de Cohen 6

CHAPITRE II - Caractérisation des opérateurs de convolution d'image fermée 10

A - Condition nécessaire de Glicksberg..... 11

B - Phénomène de Wiener-Pitt - Conséquences 13

C - Mesures discrètes et mesures absolument continues . 15

D - Sous-algèbres $M_o(G)$ et $M_c(G)$ 17

E - Propriétés équivalentes relatives aux opérateurs de convolution 21

CHAPITRE III - Sur le support des transformées de Fourier-Stieltjès 25

CHAPITRE IV - Transformées de Fourier-Stieljtès des composantes d'une mesure 36

A - Sur la composante discrète d'une mesure 36

B - Transformées de Fourier-Stieltjès à zéro isolé 38

BIBLIOGRAPHIE 47

INTRODUCTION

Ce travail consiste essentiellement en l'étude des mesures de Radon bornées, sur un groupe abélien localement compact G, pour lesquelles $\mu * L^1(G)$ est fermé dans $L^1(G)$; en d'autres termes il s'agit de caractériser les mesures μ pour lesquelles l'opérateur de convolution associé T_μ, défini sur $L^1(G)$, est d'image fermée dans $L^1(G)$.

Parmi les mesures qui vérifient cette propriété, celles qui se présentent le plus naturellement à l'esprit sont les mesures idempotentes et les mesures inversibles. Cette remarque simple nous conduit à considérer la famille plus large des mesures qui s'écrivent :

$$\mu = \eta * \nu$$

où η est une mesure idempotente et ν est une mesure inversible.

La principale question qui nous intéressera sera de savoir si on obtient ainsi toutes les mesures μ telles que $\mu * L^1(G)$ soit fermé dans $L^1(G)$.

Pour étudier les deux propriétés mises en évidence :

a) $\mu * L^1$ est fermé dans $L^1(G)$,

b) $\mu = \eta * \nu$, où η est une mesure idempotente et ν est inversible,

nous utiliserons la transformée de Fourier-Stieltjès $\hat{\mu}$ définie sur le groupe dual Γ de G.

Une première remarque porte sur l'ensemble S_μ des éléments de Γ sur lequel $\hat{\mu}$ soit différente de zéro. D'après le théorème de Cohen (Chap. I), S_μ appartient au clan Ω engendré par les classes d'équivalence de Γ. Dans le chapitre III nous établirons la proposition réci-

.../...

proque ; en d'autres termes si S_μ appartient à Ω , la mesure μ vérifie b) . Par exemple, il en sera ainsi de toutes les mesures μ pour lesquelles $\mu * L^1$ admet un supplémentaire topologique ; du moins quand G est compact.

Une seconde remarque porte sur $\hat{\mu}(\Gamma)$. Si μ vérifie b) il est évident que zéro est isolé dans $\hat{\mu}(\Gamma) \cup \{0\}$. On voit ainsi apparaître une troisième condition :

c) Zéro est isolé dans $\hat{\mu}(\Gamma) \cup \{0\}$.

Dans le chapitre II, nous établirons un résultat dû à Glicksberg [8] : a) entraîne c) . En utilisant des mesures présentant le phénomène de Wiener-Pitt, nous montrerons que la réciproque est fausse dans le cas où le groupe G n'est pas discret.

D'autre part, le théorème des idempotents de Šilov appliqué à la transformée de Gelfand de μ (notée encore $\hat{\mu}$) définie sur le spectre Δ de $M(G)$ montre que la propriété :

c_Δ) zéro est isolé dans $\hat{\mu}(\Delta) \cup \{0\}$

entraîne b). Nous introduirons alors des conditions c_S) portant sur le spectre S de certaines sous-algèbres de $M(G)$, et nous établirons en particulier que les conditions a) , b) et c) sont équivalentes si G est discret.

En comparant les deux remarques ci-dessus nous serons amenés à étudier l'ensemble S_μ associé aux mesures μ vérifiant la condition c) ; en nous servant d'une construction due à Drury [14] , nous prouverons dans le chapitre III l'existence d'une mesure μ pour laquelle S_μ n'appartient pas au clan Ω bien que μ vérifie la condition c) .

Pour une mesure $\mu \in M(G)$, notons μ_d la composante discrète de μ . Il est simple d'établir que si μ est une mesure idempotente (respectivement inversible), μ_d est une mesure idempotente (respectivement inversible). Considérant que l'étude de l'ensemble S_{μ_d} nous renseigne dans certains cas sur l'ensemble S_μ , nous avons pu établir que si zéro est isolé dans

.../...

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544305_0007

$\hat{\mu}(\Gamma) \cup \{0\}$, il le sera aussi dans $\hat{\mu}_d(\Gamma) \cup \{0\}$. Mais ces résultats peuvent apparaître aussi comme une conséquence d'une étude plus générale due à I. Glicksberg [10] et qui fera l'objet du chapitre IV ; cette étude peut en outre suggérer une orientation nouvelle dans la recherche d'une solution au problème que nous étudions ; nous y établirons en particulier que pour toute mesure μ pour laquelle zéro est isolé dans $\hat{\mu}(\Gamma) \cup \{0\}$, il existe un sous-groupe compact H dans G tel que la composante μ_H $(\neq 0)$ de μ , portée par les classes d'équivalence modulo H vérifie la propriété b) .

C'est grâce aux conseils et aux encouragements que m'a prodigués, avec beaucoup de patience et de compréhension, Monsieur J.P. Bertrandias, que j'ai pu réaliser ce travail. Je lui exprime ici toute ma gratitude.

Je suis infiniment reconnaissant à Monsieur C. Chabauty de m'avoir permis de travailler à Grenoble dans des conditions idéales. C'est un privilège. Je suis très heureux qu'il ait accepté de présider ce jury.

Monsieur A. Bernard s'est intéressé très spontanément à ce travail. Je le remercie vivement d'avoir bien voulu participer au jury.

J'exprime ma reconnaissance à Madame Guttin-Lombard et Mademoiselle Marchand, ainsi qu'à Messieurs Gaude et Girard, pour la gentillesse, la compétence et la rapidité avec lesquelles ils ont assuré la réalisation matérielle de ce travail.

CHAPITRE I

Nous rassemblons dans ce chapitre les résultats classiques dont nous aurons besoin pour la suite. Nous adopterons la terminologie de W. Rudin [1].

En raison de l'intérêt qu'il présente pour les questions que nous traiterons, nous réservons une large place au théorème de P.J. Cohen, sur les mesures idempotentes.

A - L'ALGEBRE DES MESURES SUR UN GROUPE ABELIEN

Soit G un groupe abélien localement compact muni de la mesure de Haar m ; Γ son groupe dual.

$L^1(G)$ désignera l'espace de Banach des fonctions définies presque partout et intégrables pour la mesure de Haar m, et $M(G)$ l'algèbre des mesures de Radon bornées sur G. Une mesure $\mu \in M(G)$ est concentrée sur un ensemble mesurable E si $\mu(E) = 0$ pour tout ensemble mesurable disjoint de E ; elle est discrète si elle est concentrée sur un ensemble dénombrable ; continue si pour tout ensemble dénombrable E, $\mu(E) = 0$. Enfin, μ est absolument continue si elle est absolument continue par rapport à la mesure de Haar m ; et nous noterons $\mu \ll m$.

A tout élément f de $L^1(G)$ nous pouvons associer une mesure absolument continue $\mu_f \in M(G)$:

$$\mu_f(E) = \int_G f dm .$$

Inversement, le théorème de Radon-Nykodim montre que toute mesure μ absolument continue est une mesure μ_f , pour une fonction f de $L^1(G)$. Il est clair que cette correspondance définit une isométrie de $(L^1(G) ; \|.\|_1)$ dans $(M(G) ; \|.\|_{M(G)})$, et nous pouvons alors considérer $L^1(G)$ comme un sous-espace de $M(G)$.

SOUS-ALGEBRES DE $M(G)$.

1. Théorème [1, p. 116].

a) $L^1(G)$ est un idéal fermé de $M(G)$, pour le produit de convolution.

b) L'espace des mesures continues $M_c(G)$ est un idéal fermé de $M(G)$.

c) L'espace des mesures discrètes $M_d(G)$ est une sous-algèbre fermée de $M(G)$.

SPECTRE DE $M(G)$ ET TRANSFORMEE DE GELFAND D'UNE MESURE.

Soient $M(G)$ l'algèbre de Banach des mesures de Radon bornées sur G et Δ le spectre de $M(G)$. Pour toute mesure μ de $M(G)$, nous noterons $\hat{\mu}$ sa transformée de Gelfand. Posons :

$$h_\gamma(\mu) = \int_G \langle -x, \gamma \rangle d\mu(x) \ .$$

Nous associons ainsi à tout caractère $\gamma \in \Gamma$ un élément h_γ de Δ . Cette application est un homéomorphisme de Γ dans Δ ; ce qui permettra de considérer la transformée de Fourier-Stieljès d'une mesure μ , comme la restriction à Γ de sa transformée de Gelfand.

2. Théorème des idempotents de Šilov [7, p. 47].

Soit B une algèbre de Banach commutative et unitaire et Δ son spectre. Si Δ_1 et Δ_2 sont deux fermés de Δ qui vérifient : $\Delta = \Delta_1 \Cup \Delta_2$, alors il existe $e \in B$ tel que :

$$e^2 = e \ , \quad \hat{e} = 1 \text{ sur } \Delta_1 \ , \quad \hat{e} = 0 \text{ sur } \Delta_2 \ .$$

Le lemme suivant, portant sur les unités locales dans $A(\Gamma)$, est d'un intérêt purement technique.

3. Lemme [1, p. 48].

Soit C un compact de Γ et $V \subset \Gamma$, vérifiant $0 < m(V) < +\infty$. Alors il existe $f \in L^1(G)$ telle que :

i) $\hat{f}(\gamma) = 1$ sur C, $\hat{f}(\gamma) = 0$ en dehors de $C+V-V$ et $0 \leq \hat{f}(\gamma) \leq 1$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

ii) $\|f\|_1 \leq \sqrt{\frac{m(C-V)}{m(V)}}$.

CARACTERISATION DES SOUS-ALGEBRES $L^1(G)$ et $M_c(G)$.

4. Théorème.

Une mesure μ de $M(G)$ est absolument continue si et seulement si $\mu(E-x)$ est une fonction continue de x pour tout ensemble borélien E dans G.

Démonstration : Supposons $\mu = \mu_f$, pour $f \in L^1(G)$ et définissons f_x, pour $x \in G$ par :

$$f_x(y) = f(y-x) .$$

Alors $\|f_x - f\|_1 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$, et la relation $\mu_f(E-x) = \mu_{f_x}(E)$ implique la continuité de $\mu(E-x)$.

Réciproquement, soit E un ensemble de mesure de Haar nulle, et soit g la fonction caractéristique d'un borélien A de mesure finie. Alors :

$$\int_A \mu(E-x)\,dm(x) = g * \mu(E) .$$

Puisque $g \in L^1(G)$ et que $L^1(G)$ est un idéal de $M(G)$, alors $g*\mu(E) = 0$. Par conséquent $\mu(E-x) = 0$ pour presque tout x ; par continuité $\mu(E) = 0$ et le théorème est démontré.

Nous ferons encore état d'un théorème classique, mais dont les conséquences seront utiles pour la suite.

Soit $\{V_\alpha\}$ une base de voisinages de l'origine dans G ; associons à tout voisinage V_α une fonction continue définie-positive, à support compact dans V_α et telle que $f_\alpha(0) = 1$, et posons :

$$A_\alpha(\mu) = \int_\Gamma \hat{f}_\alpha(\gamma) |\hat{\mu}(\gamma)|^2 d\gamma \quad .$$

Puisque $\hat{f}_\alpha \geq 0$ et $\int_\Gamma \hat{f}_\alpha(\gamma)\, d\gamma = 1$, $A_\alpha(\mu)$ peut-être considérée comme une moyenne de $|\hat{\mu}|^2$.

5. Théorème [1, p. 118].

Soit $\mu \in M(G)$. Alors : $\lim_\alpha A_\alpha(\mu) = \sum_{x\in G} |\mu\{x\}|^2$.

6. Corollaire.

Si $\mu \in M(G)$ est continue, alors $\inf_{\gamma\in\Gamma} |\hat{\mu}(\gamma)| = 0$.

En effet, il suffit de remarquer que :

$$\mu \in M_c(G) \Leftrightarrow \lim_\alpha A_\alpha(\mu) = 0 \quad .$$

PROPRIETES RELATIVES AUX MESURES SINGULIERES.

Soit $T = \{z\in\mathbb{C} ; |z| = 1\}$ et $\nu \in M_c(T)$, une mesure continue. Nous désignerons par ν_o la partie singulière de ν ; alors $|\nu_o|$ est aussi singulière, et la fonction croissante $H(x) = |\nu_o|(0,x)$ admet une dérivée égale à $+\infty$ en dehors d'un ensemble de mesure $|\nu_o|$-nulle.

7. Lemme.

Il existe une fonction analytique f sur le disque $D = \{z\in\mathbb{C} ; |z| < 1\}$ vérifiant :

$$f(0) = \gamma_o \neq 0 \ , \ |f| \leq 1 \text{ sur } D \text{ et } f(rz) \xrightarrow[\substack{r\to 1\\ r<1}]{} 0 \text{ pour tout } z\in T$$

sauf sur un ensemble de mesure $|\nu_o|$-nulle.

Schéma de la démonstration : Considérons l'intégrale de Poisson :

$$U(r,x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-y)+r^2} |d\nu_o(y)| \quad ;$$

elle définit une fonction harmonique positive sur $D = \{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, et il est possible de vérifier, en modifiant la démonstration du lemme de Fatou [6,p. 34], que :

$$\lim_{r\to 1} U(r,x) = +\infty \quad ,$$

en tout point où la fonction croissante $H(x) = |\nu_o|(0,x)$ admet une dérivée infinie. Soit $V(r,x)$ la conjuguée de $U(r,x)$ et posons :

$$f(re^{ix}) = e^{-U-iV}$$

puisque la fonction U est positive, $f(z)$ est majorée par 1 dans D ; de plus :

$$f(0) \neq 0 \quad \text{et} \quad f(rz) \xrightarrow[\substack{r\to 1\\ r<1}]{} 0 \quad \text{pour presque tout} \quad z \in T \ .$$

C.Q.F.D.

Soit G un groupe compact, $\mu \in M(G)$, F une famille de caractères continus sur G , $A = \{\gamma.\mu\}_{\gamma\in F}$ et $\overline{A}$ la fermeture faible de A dans $[M(G) ; \sigma(M(G),C(G))]$. Si ν est un point d'accumulation de A , alors :

8. Lemme.

i) Pour tout sous-groupe fermé G_o de G , la mesure ν coïncide, sur G_o , avec une mesure $\gamma.\mu \in A$, ou bien elle est singulière par rapport à la mesure de Haar de G_o .

ii) Si $\mu \neq 0$ et si la transformée de Fourier-Stieljès $\hat{\mu}$ ne prend que des valeurs entières, alors : $\|\nu\| < \|\mu\|$.

Démonstration : Le point i) est une conséquence immédiate du lemme de Helson [1,p.66]. Par contre, il est intéressant de donner une vérification du point ii) qui est essentiel pour la suite : soit $k < \frac{\|\nu\|}{\|\mu\|}$; alors il existe $f \in C(G)$ telle que $\|f\|_\infty \leq 1$ et $\int_G f d\nu > k\|\mu\|$. Puisque ν est un point d'accumulation de A , il existe γ_1 et γ_2 dans F telles que :

$$\gamma_1\mu \neq \gamma_2\mu \quad \text{et} \quad \Re e \int_G f\gamma_j d\mu > k\|\mu\| \quad (j=1,2) \ .$$

Soit θ telle que $d\mu = \theta d|\mu|$ et posons $f\gamma_j\theta = g_j+ih_j$; alors :

$$\int_G g_j d|\mu| > k\|\mu\| \quad \text{et par conséquent :}$$

$$\int_G |h_j| d|\mu| \leq (\sqrt{1-k^2})\|\mu\| \ .$$

donc :

$$\int_G |\gamma_j - f\gamma_1\gamma_2\theta| d|\mu| \leq (\sqrt{1-k^2}+1-k)\|\mu\| \ .$$

Ceci implique :

$$\|\gamma_1\mu-\gamma_2\mu\| \leq 2(\sqrt{1-k^2}+1-k)\|\mu\| \ .$$

Mais la transformée de Fourier-Stieljtès $\hat{\mu}$ de μ ne prend que des valeurs entières ; par conséquent $\|\gamma_1\mu-\gamma_2\mu\| \geq 1$; on en déduit :

$$k < 1 - \frac{1}{16\|\mu\|^2} \ ; \ \text{d'où} : \|\nu\| \leq \|\mu\| - \frac{1}{16\|\mu\|} \ .$$

C.Q.F.D.

B - MESURES IDEMPOTENTES SUR UN GROUPE ABELIEN. THEOREME DE COHEN.

Soit G un groupe abélien localement compact, Γ son groupe dual.

1. Définition.

Soient $\mathcal{P}(\Gamma)$ l'ensemble des parties de Γ et $\Omega \subset \mathcal{P}(\Gamma)$. Nous dirons que Ω est le clan des classes d'équivalence de Γ si Ω est le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Gamma)$ qui vérifie :

i) Ω contient tous les translatés des sous-groupes ouverts de Γ par des éléments de Γ .

ii) Ω est stable par union finie, intersection finie et par passage au complémentaire.

Soit $\mu \in M(G)$. Nous appellerons groupe-support de μ le plus petit sous-groupe fermé H de G sur lequel μ est concentrée. Nous noterons $H^{\perp}$ l'annihilateur de H . Soit :

$$H^{\perp} = \{\gamma \in \Gamma : \langle x,\gamma \rangle = 1 \ , \ \forall x \in H\} \ .$$

2. Théorème [1, p.53].

Une mesure $\mu \in M(G)$ est concentrée sur un sous-groupe fermé H de G , si et seulement si $\hat{\mu}$ est constante sur les translatées de $H^{\perp}$.

Il est donc clair que si $\mu \in M(G)$ admet pour groupe support G , alors $\mu_{\gamma} \neq \mu$ pour tout caractère $\gamma \neq 0$, où μ_{γ} est définie par $d\mu_{\gamma}(x) = \langle x,\gamma \rangle d\mu(x)$.

THEOREME DE DECOMPOSITION.

Nous désignerons par $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble des mesures $\mu \in M(G)$ telles que $\hat{\mu}(\Gamma) \subset \mathbb{Z}$.

3. Théorème [1, p.62].

Si $\mu \in \mathcal{F}(G)$ alors le groupe support de μ est compact.

Compte tenu de ce théorème, nous nous intéresserons, dans ce qui suit, uniquement aux groupes compacts. Le passage aux groupes abéliens localement compacts se fera sans difficulté.

Soit $\mu \in M(G)$. La mesure μ sera dite "mesure canonique" si $\mu \in \mathcal{F}(G)$ et est absolument continue par rapport à la mesure de Haar d'un sous-groupe fermé de G .

4. Théorème.

Soit G un groupe compact. Toute mesure $\mu \in \mathcal{F}(G)$ est somme finie de mesures canoniques deux à deux orthogonales.

Démonstration : Soit $A = \{\gamma.\mu : \int_G \langle x,\gamma\rangle d\mu(x) \neq 0\}$ et $\overline{A}$ sa fermeture faible. $\overline{A}$ est compact et $0 \notin \overline{A}$. Puisque $\mu \to \|\mu\|$ est semi-continue inférieurement sur $[M(G) ; \sigma(M(G);C(G))]$, il existe $\gamma \in \overline{A}$ dont la norme réalise le minimum sur $\overline{A}$. Soit γ vérifiant $\int_G \langle x,\gamma\rangle d\nu(x) \neq 0$; par hypothèse, $\nu = \lim_\delta \gamma_\delta\mu$ dans $\overline{A}$, où $\gamma_\delta\mu$ est une suite généralisée dans A ; il existe donc δ_o, tel que $\delta \geq \delta_o$ implique $\gamma.\gamma_\delta.\mu \neq 0$; d'où $\gamma.\gamma_\delta.\mu \in A$ pour $\delta \geq \delta_o$ et $\gamma.\nu \in \overline{A}$; et puisque $\|\gamma.\nu\| = \|\nu\|$, il en résulte que l'ensemble des mesures $\gamma.\nu$, telles que $\int_G \langle x,\gamma\rangle d\nu(x) \neq 0$, ne peut pas admettre de point d'accumulation d'après le lemme A.8,ii).

Cet ensemble est donc fini, et il est immédiat en se servant du théorème B.2, de vérifier dans ce cas que $\nu \ll m_{G_o}$, où G_o est le groupe support de ν.

Si ν n'est pas un point d'accumulation de A, le lemme A.8,i) montre que ν coïncide avec une mesure $\gamma.\mu$, et μ est alors canonique, comme ν.

Si ν est un point d'accumulation de A, elle coïncide, sur G_o, avec une mesure $\gamma.\mu$, puisqu'elle n'est pas orthogonale à m_{G_o}. Donc la restriction de $\gamma.\mu$ à G_o est canonique, et il en sera de même de la restriction de μ. Posons :

$$\mu_1 = \chi_{G_o}.\mu \text{ , où } \chi_{G_o} \text{ est la fonction caractéristique de } G_o .$$

Nous aurons : $\mu = \mu_1 + (\mu-\mu_1)$ où μ_1 est canonique et $\mu_1 \perp (\mu-\mu_1)$. La même opération s'applique à $(\mu-\mu_1) \in \mathcal{F}(G)$; et puisque :

$$\|\mu-\mu_1\| = \|\mu\| - \|\mu_1\| \leq \|\mu\| - 1 ,$$

le nombre d'opérations est nécessairement fini.

C.Q.F.D.

MESURES IDEMPOTENTES - THEOREME DE COHEN.

5. Définition.

Soit $\mu \in M(G)$. Nous dirons que μ est une mesure idempotente si $\mu_*\mu = \mu$.

Nous désignerons par $\mathfrak{I}(G)$ l'ensemble des mesures idempotentes de $M(G)$. Soit $\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \langle -x,\gamma\rangle d\mu(x)$; puisque l'application $\mu \to \hat{\mu}$ de $M(G)$ dans $B(\Gamma)$ est biunivoque et que $\widehat{\mu * \nu}(\gamma) = \hat{\mu}(\gamma).\hat{\nu}(\gamma)$, μ sera alors idempotente si $\hat{\mu}$ ne prend que les valeurs 0 ou 1 . Donc, si nous posons pour $\mu \in \mathfrak{I}(G)$, $S(\mu) = \{\gamma\in\Gamma : \hat{\mu}(\gamma) = 1\}$, il est clair que la caractérisation des mesures $\mu \in \mathfrak{I}(G)$ est équivalente à la caractérisation des ensembles S dans Γ dont la fonction caractéristique est une transformée de Fourier-Stieltjès. Cette caractérisation est donnée par le théorème suivant, dû à P.J. Cohen ; il apparaîtra comme un corollaire évident du théorème B.4 dans le cas où G est compact.

6. Théorème.

Pour qu'un sous-ensemble S de Γ soit le support d'une transformée de Fourier-Stieltjès d'une mesure $\mu \in \mathfrak{I}(G)$, il faut et il suffit que S appartienne au clan Ω .

REDUCTION DU CAS LOCALEMENT COMPACT AU CAS COMPACT.

Soit G un groupe abélien localement compact et $S \in \Omega$. Il est simple d'établir directement que χ_S est la transformée de Fourier-Stieltjès d'une mesure μ .

Inversement soit $\mu \in \mathfrak{I}(G)$; notons G_o le groupe-support de μ . Il est compact. Soit $G_o^\perp$ l'annihilateur de G_o et

$$S_{G_o}(\mu) = \{\gamma\in\Gamma/G_o^\perp : \hat{\mu}(\gamma) = 1\}$$

où μ est considérée comme un élément de $M(G_o)$. Soit $J : \Gamma \to \Gamma/G_o^\perp$ l'application canonique de Γ sur le groupe quotient $\Gamma/G_o^\perp$. Alors :

$$\text{support } (\hat{\mu}) = S(\mu) = J^{-1}(S_{G_o}(\mu)) \quad .$$

Puisque $S_{G_o}(\mu)$ appartient au clan des classes d'équivalence de $\Gamma/G_o^\perp$, $S(\mu)$ appartiendra au clan des classes d'équivalence de Γ .

CHAPITRE II

CARACTERISATION DES OPERATEURS DE CONVOLUTION D'IMAGE FERMEE

Ce chapitre sera consacré à l'étude des mesures μ de $M(G)$ vérifiant la propriété suivante :

(I) L'image $\mu * L^1$ de l'opérateur de convolution T_μ est un idéal fermé de $L^1(G)$.

Dans la partie A nous établirons un résultat dû à Glicksberg [8] : la propriété (I) entraîne :

(II) L'image de Γ par la transformée de Fourier-Stieltjès $\hat{\mu}$ de μ , n'admet pas zéro pour point d'accumulation.

Il est clair qu'une mesure inversible ou une mesure idempotente vérifie la propriété (I). Nous serons alors conduits à considérer les mesures μ vérifiant la propriété suivante :

(III) $\mu = \eta * \nu$, où η est une mesure idempotente et ν est inversible.

Dans la partie B nous rappellerons le phénomène de Wiener-Pitt ; ce qui nous permettra, en particulier, de montrer que (II) n'entraîne pas (I) .

Dans la partie C , nous ferons porter la condition (II) sur la transformée de Gelfand de μ dans des sous-algèbres $M_s(G)$ bien choisies et nous verrons que dans ce cas les propriétés (I), (II) et (III) sont équivalentes.

Dans la partie D , nous étudierons comme cas particuliers de sous-algèbres $M_s(G)$, la sous-algèbre $M_c(G)$ des mesures continues et la sous-

algèbre $M_o(G)$ des mesures dont la transformée de Fourier-Stieltjès s'annule à l'infini.

Enfin, dans la partie E nous donnerons des conditions équivalentes à la propriété (I) , ces conditions portant sur les images de l'opérateur de convolution T_μ défini sur $C_o(G)$, $L^\infty(G)$, $M(G)$.

A - CONDITION NECESSAIRE DE GLICKSBERG

Nous nous proposons de démontrer que toute mesure μ qui vérifie (I) vérifie (II) ; en d'autres termes :

$$\mu * L^1 \text{ fermé} \Rightarrow \exists k > 0 \text{ tel que } |\hat{\mu}(\gamma)| \geq \frac{1}{k} , \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\hat{\mu}^{-1}(0)\} .$$

Avant d'établir ce résultat, nous aurons besoin d'un théorème intermédiaire. Considérons $L^\infty(G)$, $\mu \in M(G)$ et posons :

$$\mu * f(x) = \int_G f(x-y) d\mu(x) \qquad (1)$$

la correspondance $f \to \mu * f$ définit un opérateur linéaire et continu de $L^\infty(G)$ dans $L^\infty(G)$. Puisque $L^\infty(G)$ est le dual de $L^1(G)$, la formule de dualité étant donnée par :

$$\langle f, \varphi \rangle = f * \varphi(0) = \int_G \varphi(-x) f(x) dx , \quad \forall f \in L^1 , \forall \varphi \in L^\infty ,$$

si T_μ désigne l'opérateur de convolution sur $L^1(G)$ défini à partir de μ , son adjoint T_μ^* sera l'opérateur défini en (1) à partir de la même mesure.

1. Théorème [5, p. 488].

Soit $T \in L[E,F]$ où E et F désignent deux espaces de Banach. Pour que T soit d'image fermée dans F , il faut et il suffit que son adjoint $T^* \in L(F',E')$ soit d'image fermée dans E' .

2. Théorème.

Soit $\mu \in M(G)$. Si $\mu * L^1$ est fermée, alors il existe $k > 0$ tel que :

$$|\hat{\mu}(\gamma)| \geq \frac{1}{k} , \quad \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\hat{\mu}^{-1}(0)\} .$$

Démonstration : Soit T_μ l'opérateur de convolution sur $L^1(G)$ défini par :

$$T_\mu(f) = \mu * f , \quad \forall f \in L^1(G) .$$

Nous désignerons par T_μ^* son adjoint sur $L^\infty(G)$, défini par :

$$T_\mu^*(\varphi) = \mu * \varphi , \quad \forall \varphi \in L^\infty .$$

D'après le théorème (II.A.1), puisque $T_\mu(L^1) = \mu * L^1$ est fermé, $T_\mu^*(L^\infty) = \mu * L^\infty$ est aussi fermé ; ce qui nous permet d'affirmer que l'application :

$$(\varphi + \ker \mu) \rightarrow \mu * \varphi$$

définit un isomorphisme topologique de $L^\infty / \ker \mu$ sur $\mu * L^\infty$; il existe donc $k > 0$ tel que :

$$\|\varphi + \ker \mu\| \leq k \|\mu * \varphi\|_\infty , \quad \forall \varphi \in L^\infty .$$

En particulier, si φ est un caractère $\gamma \in \Gamma$, nous aurons :

$$\|\gamma + \ker \mu\| \leq k \|\mu * \gamma\| = k \|\hat{\mu}(\gamma) . \gamma\|_\infty = k |\hat{\mu}(\gamma)| .$$

Or $\operatorname{Ker} \mu = (\mu * L_1)^\perp$, annihilateur du sous-espace $\mu * L^1$; et il est facile de vérifier que la norme-quotient

$$\|\gamma + \ker \mu\| = \inf_{\varphi \in \ker \mu} \|\gamma + \varphi\|_\infty = \|\gamma\|_\infty = 1 , \quad \forall \gamma \notin \ker \mu = (\mu * L^1)^\perp .$$

En effet, puisque $Z(\mu * L^1) = \{\hat{\mu}^{-1}(0)\}$, alors $\gamma \notin Z(\mu * L^1) \Leftrightarrow \gamma \notin (\mu * L^1)^\perp$, et le lemme (I.A.3) implique qu'il existe $f \in L^1$ telle que $\hat{f}(\gamma) = 1$, $\hat{f} = 0$ sur un ouvert contenant $Z(\mu * L^1)$ et $\|f\|_1 = 1$. Donc si $\varphi \in (\mu * L^1)^\perp$,

$$(\gamma + \varphi) * f(0) = \hat{f}(\gamma) = 1 ,$$

et la norme de $\gamma + \varphi$, considéré comme forme linéaire sur $\mu * L^1$ est de norme $\|\gamma + \varphi\| \geq 1$, et par suite :

$$\|\gamma + \varphi\|_\infty \geq 1 , \quad \forall \varphi \in (\mu * L^1)^\perp$$

d'où

$$\|\gamma+\mathrm{Ker}\ \mu\| = \inf_{\varphi\in \mathrm{Ker}\ \mu} \|\gamma+\varphi\|_\infty = 1$$

donc

$$k|\hat{\mu}(\gamma)| \geq 1 \ , \quad \forall \gamma \in \Gamma\setminus(\hat{\mu}^{-1}\{0\}) \ .$$

C.Q.F.D.

Soit μ une mesure de $M(G)$ vérifiant :

$$|\hat{\mu}(\gamma)| \geq \frac{1}{k} \ , \ \forall \gamma \in \Gamma\setminus\{\hat{\mu}^{-1}(0)\} \ .$$

$\mu * L^1$ est-il fermé ? Les lemmes suivants nous permettront de répondre à cette question.

B - PHENOMENE DE WIENER-PITT - Conséquences.

1. Lemme [1, p. 103].

Tout groupe abélien localement compact non discret G contient un ensemble indépendant de Cantor ; et pour tout ensemble de Cantor P, il existe une mesure continue $\mu \in M(G)$, concentrée sur P, positive et de norme $\|\mu\| = 1$.

Nous rappelons qu'un ensemble $P \subset G$ est indépendant si :

$$n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k = 0 \Leftrightarrow n_1x_1 = \ldots = n_kx_k = 0 \text{ pour}$$

toute suite $x_1,\ldots,x_k$ d'éléments distincts de P et toute suite $n_1,\ldots,n_k$ d'entiers ; il est de Cantor, s'il est homomorphe à l'ensemble triadique de Cantor sur la droite réelle.

2. Lemme [1, p. 105].

Soient G un groupe abélien localement compact non discret, $P \subset G$ un compact indépendant et $Q = P \cup (-P)$. Si μ est une mesure continue concentrée sur Q, alors les mesures δ_o, μ, μ^2, ..., μ^n, ... (où $\mu^n = \mu * \mu^{n-1}$) sont mutuellement singulières.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer que la condition nécessaire énoncée dans le théorème (A.1) n'est pas suffisante, quand G

n'est pas discret.

3. Théorème.

Soit G un groupe abélien localement compact non discret ; alors il existe une mesure $\tau \in M(G)$ vérifiant $\hat{\tau}(\gamma) \geq 1$ et $\tau * L_1 \subsetneq \overline{\tau * L_1}$.

Démonstration : D'après le lemme 1, il existe un ensemble indépendant de Cantor P et une mesure $\mu_1 \in M_c^+(G)$, concentrée sur P et de norme $\|\mu_1\| = 1$. Posons : $\mu = \frac{1}{2}(\mu_1 + \tilde{\mu}_1)$ où $\tilde{\mu}_1(E) = \mu_1(-E)$, pour tout E mesurable. Alors $\mu \in M_c^+(G)$; elle est concentrée sur $Q = P \cup (-P)$ et vérifie $\mu = \tilde{\mu}$. Soit $\sigma = \delta_o - \mu^2$; puisque (lemme 2) les mesures δ_o , μ ,... μ^n ,... sont mutuellement singulières, nous aurons :

$$\|\sigma^n\| = \|\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mu^{2k}\| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|\mu^{2k}\|$$

mais $\mu > 0$ implique :

$$\|\mu^{2k}\| = \|\mu\|^{2k} = 1$$

donc

$$\|\sigma^n\| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad ,$$

et le rayon spectral de σ est égal à :

$$r(\sigma) = \lim \|\sigma^n\|^{1/n} = 2 \ .$$

Par conséquent, il existe un homomorphisme h sur $M(G)$ qui vérifie :

$$|h(\sigma)| = |1 - h(\mu^2)| = 2 \qquad (1)$$

et puisque $|h(\mu^2)| \leq 1$, (1) n'est possible que si $h(\mu^2) = -1$, soit $h(\mu) = \pm i$. Posons maintenant :

$$\tau = \delta_o + \mu^2 \ .$$

Puisque $\mu = \tilde{\mu}$ et $\|\mu\| = 1$, alors $\hat{\mu}$ est réelle sur Γ et $-1 \leq \hat{\mu}(\gamma) \leq 1$; donc :

$$1 \leq \hat{\tau}(\gamma) \leq 2 \ , \quad \forall \gamma \in \Gamma$$

d'autre part, $h(\tau) = 1 + h(\mu^2) = 0$; ce qui implique que τ n'est pas inversible.

Soit alors $Z(\tau * L^1) = \{\gamma \in \Gamma : \hat{f}(\gamma) = 0, \forall f \in \tau * L^1\}$ et T_τ l'opérateur de convolution sur L^1 défini par τ . Puisque $Z(\tau * L^1) = \{\hat{\tau}^{-1}(0)\} = \phi$, si $\tau * L^1$ était fermé, on aurait :

$$\tau * L^1 = L^1 \quad \text{(voir [1] p. 160).}$$

Mais T_τ est injectif ; il admettrait donc un inverse T_τ^{-1} continu sur L^1 , évidemment invariant par translation ; autrement dit T_τ^{-1} serait un opérateur de convolution associé à une mesure $\eta \in M(G)$ vérifiant :

$$\tau * \eta * f = f \quad , \quad \forall f \in L^1(G) \ .$$

donc $\tau * \eta = \delta_o$; ce qui est une contradiction.

C.Q.F.D.

C - MESURES DISCRETES ET MESURES ABSOLUMENT CONTINUES.

Il a été établi par Wick que toute mesure $\tau \in M_d(G)$ vérifiant $|\hat{\tau}(\gamma)| \geq 1$, pour tout $\gamma \in \Gamma$, était inversible. Le théorème (B.3) caractérise donc les groupes discrets. Le lemme qui suit nous permettra, en particulier, de généraliser le résultat de Wick. Soit alors $M_s(G)$ une sous-algèbre fermée de $M(G)$, Δ_s son spectre de Gelfand.

1. Lemme.

Soit i l'application sur Γ à valeurs dans Δ_s définie par :

$$\gamma \to i(\gamma) \quad \text{où} \quad i(\gamma)(\mu) = \int_G \langle -x, \gamma \rangle d\mu(x) \ , \quad \forall \mu \in M_s(G) \ .$$

Si $\overline{i(\Gamma)} = \Delta_s$, alors toute mesure $\mu \in M(G)$ vérifiant :

$$|\hat{\mu}(\gamma)| \geq k > 0 \ , \quad \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\hat{\mu}^{-1}(0)\} \ ,$$

s'écrit : $\mu = \eta * \nu$, où ν est une mesure inversible et $\eta = \eta^2$.

Démonstration : Si $M_s(G)$ n'est pas unitaire, nous noterons $\overline{\Delta_s}$ le spectre de la sous-algèbre $M_s \oplus \mathbb{C}.\delta_o$; c'est le compactifié d'Alexandroff de Δ_s . Soient $\mu \in M_s(G)$, et $\hat{\mu}$ sa transformée de

Gelfand ; si

$$\hat{\mu}(h) \neq 0 \Rightarrow |\hat{\mu}(h)| \geq k > 0 \ , \quad \forall h \in \Delta_s \qquad (1)$$

il est clair que nous aurons encore la propriété (1) sur $\overline{\Delta_s}$. Posons maintenant :

$$\Delta_1 = \{\hat{\mu}^{-1}(0)\}$$

et

$$\Delta_2 = \complement_{\overline{\Delta_s}} \cdot \Delta_1 \ .$$

C'est une bipartition en ouverts de $\overline{\Delta_s}$. En appliquant le théorème [I.A.2] sur les idempotents de Šilov, nous pouvons affirmer qu'il existe $\eta \in M_s \oplus \mathbb{C}.\delta_o$ vérifiant :

$$\eta^2 = \eta \quad \text{et} \quad \{\hat{\eta}^{-1}(0)\} = \{\hat{\mu}^{-1}(0)\} \ .$$

Soit alors $\nu = \mu - \eta + \delta_o \in M_s(G) \oplus \mathbb{C}.\delta_o$. Sa transformée de Gelfand $\hat{\nu}$ vérifie $\hat{\nu} = \hat{\mu} - \hat{\eta} + 1$ et ne s'annule donc pas sur $\overline{\Delta_s}$; la mesure ν est par conséquent inversible. D'autre part : $\hat{\mu} = \hat{\eta} \times \hat{\nu}$; et puisque $M_s(G) \oplus \mathbb{C}.\delta_o$ est une algèbre semi-simple, μ s'écrit alors : $\mu = \eta * \nu$.

Ceci étant, si la transformée de Fourier-Stieltjès de μ vérifie (1) sur Γ , alors sa transformée de Gelfand vérifiera la même propriété sur $i(\Gamma)$, sous-ensemble partout dense de $\overline{\Delta_s}$, et nous sommes ramenés aux conditions ci-dessus.

C.Q.F.D.

Nous sommes maintenant en mesure de vérifier que la condition nécessaire dont fait état le théorème (A.2) est suffisante lorsque G est discret. En effet :

2. Corollaire.

Soit $\mu \in M_d(G)$ et $k > 0$ vérifiant :

$$|\hat{\mu}(\gamma)| \geq k \ , \quad \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\hat{\mu}^{-1}(0)\} \ .$$

Alors $\mu = \eta * \nu$ où η est une mesure idempotente et ν est inversible.

Ce corollaire est une conséquence immédiate du lemme 1 ; il suffit de remarquer que le spectre de $M_d(G)$ est le compactifié de Bohr

de Γ et que l'application : $\gamma \to i(\gamma)$ est d'image dense.

En procédant exactement comme pour le corollaire 2, il est possible d'établir un résultat plus général ; en effet, puisque la sous-algèbre $L^1(G)$ a pour spectre Γ :

3. Corollaire.

Soit $\mu \in L^1(G)$ et $k > 0$ vérifiant :

$$|\hat{\mu}(\gamma)| \geq k \ , \quad \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{\hat{\mu}^{-1}(0)\} \ .$$

Alors $\mu = \eta * \nu$ où η est une mesure idempotente et ν est inversible.

Remarque.

Il est clair que le corollaire 3 reste vrai, si au lieu de prendre une mesure μ dans $L^1(G)$, on prenait μ dans $M_o(G)$; en effet, sa transformée de Fourier-Stieltjès serait alors à support compact, et en appliquant le théorème d'inversion [1, p.21], nous pourrions affirmer que μ appartient à $L^1(G)$.

D - SOUS-ALGEBRES $M_o(G)$ et $M_c(G)$.

Partant du lemme (C.1) nous nous sommes intéressés aux sous-algèbres $M_o(G)$ et $M_c(G)$. Dans la remarque précédente, nous nous sommes servis du théorème d'inversion. Nous pourrons nous en passer en étudiant le spectre de $M_o(G)$.

1. Théorème [13, p.3].

Si G est un groupe abélien localement compact non discret, il existe une mesure $\mu \in M_o^+(G)$ telle que :

i) $\mu^n = \widetilde{\mu^n}$; $\|\mu^n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

ii) $n,m \in \mathbb{N}$, $n \neq m \Rightarrow \mu^n \perp \mu^m$ (μ^n et μ^m sont mutuellement singulières.

Conséquences : Nous savons que $L^1(G)$ est une algèbre symétrique, puisque pour toute mesure $\mu \in L^1(G)$, la fonction $\overline{\hat{\mu}}$ définie sur Γ , spectre de $L^1(G)$, est la transformée de Fourier-Stieljtès de la mesure $\check{\mu}$. Par contre, le théorème 1 implique que ni $M_c(G)$, ni $M_o(G)$ ne le sont. En effet, soit :

$$\sigma = \delta_o - \mu^2 \quad \text{où} \quad \mu \text{ vérifie les conditions i) , ii) .}$$

Nous savons alors [cf. démonstration du théorème B.3] qu'il existe un homomorphisme h sur $M_c(G)$ qui vérifie $h(\mu) = \pm i$. Or $\mu = \tilde{\mu}$; par conséquent, $\overline{\hat{\mu}}$, définie sur le spectre de $M_c(G)$, n'est pas la transformée de Gelfand d'une mesure $\nu \in M_c(G)$. Puisque nous avons l'inclusion :

$$M_o(G) \subset M_c(G) \ ,$$

nous pouvons affirmer que ni $M_c(G)$ ni $M_o(G)$ ne sont symétriques.

2. Lemme.

Soit G un groupe abélien localement compact non discret, et Δ_o le spectre de $M_o(G)$. Alors :

i) $\Gamma \subsetneq \Delta_o$.

ii) Γ est ouvert et fermé dans Δ_o .

Démonstration : Soit i l'application sur Γ à valeurs dans Δ_o , définie par :

$$\gamma \to i(\gamma) \quad \text{où} \quad i(\gamma)(\mu) = \int_G \langle -x, \gamma \rangle d\mu(x) \ , \quad \forall \mu \in M_o(G) \ .$$

Il est immédiat de vérifier que cette application est un homéomorphisme de Γ dans Δ_o ; ce qui nous permettra en particulier de considérer les restrictions des transformées de Gelfand, à Γ , comme les transformées de Fourier-Stieltjès ; d'autre part, $M_o(G)$ n'est pas symétrique ; par conséquent : $\Gamma \subsetneq \Delta_o$, ce qui démontre i) . Soit maintenant h un homomorphisme sur $M_o(G)$, non identiquement nul sur $L^1(G)$; alors $\exists \gamma_o \in \Gamma$, $\exists f \in L^1(G) : \hat{f}(\gamma_o) = 1$ et $h(g) = \hat{g}(\gamma_o)$, $\forall g \in L^1(G)$; si $\mu \in M_o(G)$, considérons $f*\mu$; nous aurons

$$h(f*\mu) = \hat{f}(\gamma_o)\hat{\mu}(\gamma_o) = h(f)h(\mu) = h(\mu) \ ,$$

et alors $h \in \Gamma$; ceci nous permet d'affirmer que la transformée de Gelfand d'une mesure absolument continue s'annule en dehors de Γ , et par conséquent Γ est ouvert dans Δ_o .

Enfin, soit $h \in \overline{\Gamma}$ et considérons $\mu_o \in M_o(G)$, vérifiant $h(\mu) \neq 0$. Puisque $\hat{\mu} \in C_o(\Gamma)$, il existe alors un compact $K \subset \Gamma$ tel que :

$$|\hat{\mu}_o(\gamma)| < \frac{1}{2}|h(\mu_o)| \ , \ \forall \gamma \in \Gamma \backslash K \ .$$

Mais, puisque $h \in \overline{\Gamma}$, pour tout voisinage $V(h)$, il existe $\gamma \in V(h) \cap \Gamma$, vérifiant :

$$|h(\mu_o) - \hat{\mu}_o(\gamma)| < \frac{1}{2} |h(\mu_o)| \ ;$$

ceci implique :

$$|\hat{\mu}_o(\gamma)| \geq |h(\mu_o)| - |\hat{\mu}_o(\gamma) - h(\mu_o)| > \frac{1}{2} |h(\mu_o)| \ .$$

Donc

$$\gamma \in K \quad \text{et} \quad h \in \overline{K} = K \subset \Gamma \ .$$

Ainsi Γ est fermée, et ii) est démontrée.

Conséquences :

i) Soit $\mu \in M_o(G)$ et $k > 0$ vérifiant :

$$|\hat{\mu}(\gamma)| \geq k \ , \ \forall \gamma \in \Gamma \backslash \{\hat{\mu}^{-1}(0)\} \ ,$$

et posons :

$$\Delta_1 = \{\gamma \in \Gamma : \hat{\mu}(\gamma) \neq 0\} \ .$$

Alors Δ_1 est un compact ouvert dans $\overline{\Delta}$, spectre de $M_o(G) \oplus \mathbb{C}.\delta_o$; en appliquant le théorème sur les idempotents de Šilov, on peut affirmer qu'il existe $\eta \in M_o(G) \oplus \mathbb{C}.\delta_o$ vérifiant :

$$\hat{\eta} = 1 \quad \text{sur} \quad \Delta_1 \ , \ \hat{\eta} = 0 \quad \text{sur} \quad \overline{\Delta} \backslash \Delta_1 \ .$$

Ceci étant, il est facile de vérifier que : $\mu = \eta * (\mu - \eta + \delta_o)$ et que $\mu - \eta + \delta_o$ est inversible.

ii) Que peut-on dire, si au lieu de prendre $\mu \in M_o(G)$, on prenait $\mu \in M_c(G)$? J'ignore la réponse, en général ; cependant dans le cas où $G = T$ $(T = \{z \in \mathbb{C} \ , \ |z| = 1\})$, μ s'écrira encore :

$$\mu = \eta * \nu \quad \text{où} \quad \nu \quad \text{est une mesure inversible et} \quad \eta^2 = \eta \ .$$

En effet, cela résulte du corollaire (C.3) et du lemme suivant :

3. Lemme.

Soient $k > 0$ et $\mu \in M_c(T)$ vérifiant :

$$|\hat{\mu}(n)| \geq k \ , \ \forall n \in N \setminus \{\hat{\mu}^{-1}(0)\} \ .$$

Alors μ est une mesure absolument continue.

Démonstration : Soit μ_s la composante singulière de μ ; on sait (lemme I.A.7) qu'il existe une fonction analytique sur $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, vérifiant :

$$f(0) = \gamma_o \neq 0 \ , \ |f| \leq 1 \text{ sur } D \ , \text{ et } \lim_{\substack{r \to 1 \\ r<1}} f(rz) > 0 \text{ pour } \forall z \in T$$

sauf sur un ensemble de mesure $|\mu_s|$-nulle.

Le théorème de la convergence dominée implique alors :

$$\lim_{\substack{r \to 1 \\ r<1}} \int_0^{2\pi} |f(re^{ix})| d|\mu_s|(x) = 0 \ , \qquad (1)$$

Notons $f_r.\mu_s$ la mesure définie sur le tore par :

$$f_r.\mu_s(E) = \int_E f(re^{ix}) d\mu_s(x) \text{ et par } c_n(r) \text{ ses coefficients de Fourier ;}$$

D'après (1) nous voyons que $c_n(r) = \int_0^{2\pi} e^{-inx} f(re^{ix}) d\mu_s(x)$ converge vers 0 , quand $r \to 1$, uniformément par rapport à n .

D'autre part, μ est continue ; si b_n désigne les coefficients de Fourier-Stieltjès de μ nous aurons alors :

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} \sum_{n-N}^{+N} |b_n|^2 = 0 \ . \qquad (2)$$

Supposons maintenant qu'il existe une infinité d'entiers $n > 0$ pour lesquels b_n vérifie :

$$|b_n| \geq k \ ;$$

pour que l'égalité (2) soit vérifiée il est nécessaire, dans ce cas, que pour tout entier naturel N , il existe un entier $p(N) > N$ tels que :

$$b_p \neq 0 \ , \quad b_{p-k} = 0 \ , \quad k = 1,\ldots,N \ .$$

Notons $b_n(r)$ les coefficients de Fourier-Stieltjès de la mesure $f_r.\mu$; alors si

$$f(rz) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n r^n z^n$$

est le développement en série de f dans D , nous aurons :

$$b_p(r) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m r^m b_{p-m} = \gamma_o b_p + \sum_{N+1}^{\infty} \gamma_m r^m b_{p-m}$$

d'où

$$|b_p(r)| \geq |\gamma_o| k - \sum_{m=N+1}^{\infty} |\gamma_m| r^m |b_{p-m}| \quad . \qquad (3)$$

Pour r fixé, quand $N \to +\infty$, $p(N) \to +\infty$ aussi, et de l'inégalité (3) nous tirons :

$$\limsup |b_n(r)| \geq |\gamma_o| . k > 0 \ .$$

Considérons maintenant la mesure $f_r(\mu-\mu_s)$; elle est absolument continue et ses coefficients de Fourier $(b_n(r)-c_n(r))$ vérifient alors :

$$|b_n(r) - c_n(r)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ ,$$

et par suite

$$\limsup |c_n(r)| \geq |\gamma_o| . k > 0 \ ,$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $c_n(r) \xrightarrow[r\to 1]{} 0$ uniformément par rapport à n ; il suffit maintenant d'appliquer le théorème de F.M. Riesz pour affirmer que μ est une mesure absolument continue.

C.Q.F.D.

E - PROPRIETES EQUIVALENTES RELATIVES AUX OPERATEURS DE CONVOLUTION.

Nous nous proposons de donner quelques énoncés équivalents pour la caractérisation des mesures $\mu \in M(G)$, pour lesquelles $\mu * L_1$ est fermé. Nous aurons besoin du lemme d'inclusion suivant :

1. Lemme.

Soient μ et $\nu \in M(G)$; alors :

$$\nu * L_1 \subset \mu * L_1 \Leftrightarrow \nu * M \subset \mu * M .$$

Démonstration : Supposons vérifiée l'inclusion : $\nu * M \subset \mu * M$; puisque M est une algèbre unitaire, alors

$$\nu = \mu * \lambda \quad , \quad \lambda \in M(G) ;$$

et par suite :

$$\nu * L_1 = \mu * \lambda * L_1 \subset \mu * L_1 .$$

Supposons maintenant que : $\nu * L_1 \subset \mu * L_1$; alors pour tout $f \in L^1$, $\exists g \in L^1$ vérifiant :

$$\nu * f = \mu * g .$$

Posons : $N_\mu = \{f \in L_1 : \mu * f = 0\}$ et considérons l'application linéaire T définie par :

$$L_1 \to L_1/N_\mu$$

$$f \to T(f) = g + N_\mu .$$

Le graphe de T est fermé : en effet si $f_n \to f$ dans L^1 et $g_n + N_\mu \to g + N_\mu$ dans L_1/N_μ, alors :

$\nu * f_n \to \nu * f$, tandis que $\mu * g_n \to \mu * g$, et comme : $\nu * f_n = \mu * g_n$, il en résulte que $\nu * f = \mu * g$ et par suite :

$$Tf = g .$$

L'application T est donc continue, et il en sera de même de son adjointe T^*. Or le dual de L^1/N_μ est isomorphe et isométrique au sous-espace $N_\mu^\perp$ des formes linéaires sur L^1 qui s'annulent sur N_μ ; donc en mettant L^1 en dualité avec L^∞ au moyen de :

$$\langle f, \varphi \rangle = f * \varphi(0) \quad \text{pour} \quad f \in L^1 \quad \text{et} \quad \varphi \in L^\infty ,$$

$N_\mu^\perp$ sera un sous-espace de L^1 qui contient $\mu * L^\infty$. Soient alors $\varphi \in L^\infty$, $f \in L^1$ et $g \in L^1$ vérifiant $\nu * f = \mu * g$. Nous aurons :

$$\langle g + N_\mu, \mu * \varphi \rangle = \langle \mu * g, \varphi \rangle = \langle \nu * f, \varphi \rangle = \langle f, \nu * \varphi \rangle .$$

Par conséquent, $T^*(\mu * \varphi) = \nu * \varphi$, et il existe alors $k > 0$ tel que :

$$\| \nu * \varphi \|_\infty \leq k \| \mu * \varphi \|_\infty , \quad \varphi \in L^\infty \qquad (1)$$

L'inégalité (1) nous permet de définir sur $\mu_* C_o$, muni de la norme $\|.\|_\infty$, la forme linéaire et continue définie par :

$$\mu_*\varphi \rightarrow \nu_*\varphi(0) = \int_G \varphi(-y)\,d\nu(y) \ .$$

Cette forme linéaire admet un prolongement continu à C_o tout entier ; et puisque le dual de $C_o(G)$ est $M(G)$, ce prolongement sera défini par :

$$\begin{aligned} C_o &\rightarrow \mathbb{C} \\ \theta &\rightarrow \lambda_*\theta(0) \ , \end{aligned}$$

pour une certaine mesure $\lambda \in M(G)$.

Par conséquent, $\nu_*\varphi(0) = \lambda_*\mu_*\varphi(0)$, $\forall \varphi \in L^\infty$ et

$$\nu = \lambda_*\mu$$

donc

$$\nu_* M = \lambda_*\mu_* M \subset \mu_* M \ .$$

C.Q.F.D.

2. Théorème.

Soit $\mu \in M(G)$. Alors :

$$\mu_* L_1 \text{ fermé} \Leftrightarrow \mu_* M \text{ fermé} \ .$$

Démonstration : Supposons $\mu_* L_1$ fermé , et soit $\nu \in \overline{\mu_* M}$; alors $\nu = \lim \mu_*\lambda_n$, tandis que : $\mu_*\lambda_n * L_1 \subset \mu_* L_1$. Donc pour tout $f \in L^1$, $\mu_*\lambda_n * f \rightarrow \nu * f$, et puisque $\mu_* L_1$ est fermé, $\nu * f \in \mu_* L_1$ et par suite $\nu_* L_1 \subset \mu_* L_1$. Le lemme précédent implique alors

$$\nu_* M \subset \mu_* M \ ;$$

soit $\nu \in \mu_* M$ et $\mu_* M$ est fermé.

Supposons maintenant $\mu_* M$ fermé et considérons :

$$N_\mu^o = \{\nu \in M(G) : \mu_*\nu = 0\} \quad \text{et} \quad N_\mu = \{\nu \in L^1 : \mu_*\nu = 0\} \ .$$

N_μ^o et N_μ sont des idéaux fermés de M ; par suite M/N_μ^o est un espace de Banach pour la norme quotient, isomorphe à $\mu_* M$, lui-même de Banach. Par conséquent, il existe $k > 0$ tel que :

$$\|\nu + N_\mu^o\| \leq k\|\mu_*\nu\| \ . \qquad (1)$$

Par ailleurs : $\|\nu+N_\mu\| \leq \|\nu+N_\mu^o\|$ pour tout $\nu \in L^1$; en effet, soit $\lambda \in N_\mu^o$, et e_α une unité approchée dans L^1, alors :

$$\|\nu*e_\alpha + \lambda*e_\alpha\| \leq \|\nu+\lambda\| \quad , \quad \forall\alpha \ ,$$

et

$$\|\nu*e_\alpha + \lambda*e_\alpha\| \geq \|\nu*e_\alpha + N_\mu\| = \inf_{\theta\in N_\mu} \|\nu*e_\alpha + \theta\|$$

donc

$$\|\nu*e_\alpha + N_\mu\| \leq \|\nu+\lambda\| \ , \ \forall\lambda \in N_\mu^o \ . \qquad (2)$$

Or $\nu*e_\alpha \xrightarrow[\alpha]{} \nu \Rightarrow \nu*e_\alpha + N_\mu \xrightarrow[\alpha]{} \nu + N_\mu$, et en tenant compte de (1) et (2) , nous aurons :

$$\|\nu + N_\mu\| \leq \|\nu + N_\mu^o\| \leq k\|\mu_*\nu\| \ . \qquad (3)$$

Soit maintenant φ l'application linéaire sur $\mu*L_1$ définie par

$$\mu*L_1 \to L^1/N_\mu$$
$$\mu*\nu \to \varphi(\mu*\nu) = \nu + N_\mu \ .$$

φ est bijective ; d'après (3) elle est continue ; et puisque L^1/N_μ est un espace de Banach, il en sera de même de $\mu*L^1$. Ainsi $\mu*L^1$ est fermé dans L^1 .

C.Q.F.D.

Remarque.

Considérons $L^\infty(G)$, $\mu \in M(G)$ et posons :

$$\mu*f(x) = \int_G f(x-y)d\mu(x) \ . \qquad (1)$$

Il est clair que la correspondance $f \to \mu*f$ définit un opérateur linéaire et continu de L^∞ dans L^∞ ; en particulier si $f \in C_o(G)$, alors $\mu*f \in C_o(G)$. En outre, si T_μ désigne l'opérateur de convolution sur $C_o(G)$, défini par μ , alors son adjoint T_μ^* sera l'opérateur de convolution défini sur $M(G)$, à partir de la même mesure. Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 2 et du théorème A.1.

3. Corollaire.

Soit $\mu \in M(G)$. Alors :

$$\begin{array}{ccc} \mu*L^1 \text{ fermé} & \Leftrightarrow & \mu*M \text{ fermé} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mu*L^\infty \text{ fermé} & \Leftrightarrow & \mu*C_o \text{ fermé} \end{array}$$

CHAPITRE III

SUR LE SUPPORT DES TRANSFORMEES DE FOURIER-STIELJES

Jusqu'à présent, les seules mesures μ de $M(G)$ telles que $\mu * L^1$ soit fermée, que nous ayons caractérisées, sont celles qui s'écrivent :

$$\mu = \eta * \nu \quad (1)$$

où η est une mesure idempotente et ν est une mesure inversible.

Soit $S_\mu = \{\gamma \in \Gamma : \hat{\mu}(\gamma) \neq 0\}$. Il est clair que si μ vérifie (1), alors S_μ appartient au clan des classes d'équivalence Ω . (voir chapitre I).

Dans ce chapitre, nous établirons une réciproque de ce fait-là ; nous poserons ensuite le problème d'une éventuelle généralisation du théorème de P.J. Cohen [I.B.6], aux mesures μ pour lesquelles zéro n'est pas point d'accumulation dans $\hat{\mu}(\Gamma) \cup \{0\}$.

1. Lemme.

Soit E un espace de Banach, $T \in L(E,E)$ vérifiant :

i) TE est un espace de Banach.

ii) $T \in L(TE,TE)$ et T inversible dans $L(TE,TE)$.

Alors si T n'est pas inversible, zéro est isolé dans le spectre de T .

Démonstration : l'hypothèse ii) implique :

$\exists c > 0$, $\forall \alpha, |\alpha| < c$: $(\alpha I - T)$ inversible dans $L(TE,TE)$ (I désigne l'opérateur identité).

Par conséquent pour tout x appartenant à E, il existe y appartenant à E vérifiant :

$$Tx = (\alpha I - T)(Ty)$$

soit : $$x - (\alpha I - T)y \in \operatorname{Ker} T .$$

Or, pour $u \in \operatorname{Ker} T$, nous avons :

$$(\alpha I - T)u = \alpha u$$

et par suite $x = (\alpha I - T)y + x - (\alpha I - T)y = (\alpha I - T)y + (\alpha I - T)h$, où $h \in \operatorname{Ker} T$ donc : $x = (\alpha I - T)z$, pour un certain $z \in E$, et $(\alpha I - T)$ est alors surjectif.

Soit maintenant $x \in E$ vérifiant $(\alpha I - T)x = 0$; alors :

$$(\alpha I - T)Tx = 0 \quad \text{et donc} \quad Tx = 0$$

puisque $Tx = \alpha x$, il en résulte que $x = 0$ et par conséquent $(\alpha I - T)$ est injectif.

Puisque E a été supposé de Banach, l'opérateur $(\alpha I - T)$ est alors inversible.

C.Q.F.D.

Pour une mesure μ de $M(G)$, notons $S_\mu = \{\gamma \in \Gamma : \hat{\mu}(\gamma) \neq 0\}$, et soit Ω le clan des classes d'équivalence de Γ.

2. Théorème.

Si $S_\mu \in \Omega$ alors :

$$\mu * L^1 \text{ fermé} \Leftrightarrow \mu = \eta * \nu \text{ , où } \eta^2 = \eta \text{ et } \nu \text{ est inversible.}$$

Démonstration : Puisque $S_\mu \in \Omega$, il existe une mesure idempotente θ telle que :

$$S_\mu = S_\theta$$

donc : $$\mu = \theta * \mu \qquad (1).$$

D'autre part, tout élément de Ω est ouvert et fermé dans le groupe dual Γ ; par conséquent, l'ensemble $S_\mu = S_\theta$ est de synthèse, et puisque $\mu * L^1$ est fermé :

$$\mu * L^1 = \theta * L^1 \qquad (2)$$

les égalités (1) et (2) nous permettent alors d'affirmer que l'opérateur T_μ défini par :

$$\begin{aligned} \mu * L^1 &\to \mu * L^1 \\ f &\to \mu * f \end{aligned}$$

est inversible dans $L^1(\mu * L^1 ; \mu * L^1)$ et, en appliquant le lemme 1, nous pouvons dire qu'il existe $c > 0$ vérifiant : $(\alpha\delta_o - \mu)$ est inversible pour tout $\alpha \neq 0$, $|\alpha| < c$.

Mais il revient au même de dire que $(\hat{\mu}^{-1}\{0\})$ est <u>ouvert et fermé</u> dans Δ , si $\hat{\mu}$ désigne la transformée de Gelfand de μ et Δ le spectre de $M(G)$; car en fait zéro est isolé dans le spectre de μ . Posons alors :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \{\hat{\mu}^{-1}(0)\} \\ \Delta_2 &= \Delta \setminus \{\hat{\mu}^{-1}(0)\} . \end{aligned}$$

Puisque $M(G)$ est une algèbre unitaire, le théorème sur les idempotents de Šilov implique qu'il existe $\eta \in M(G)$ vérifiant :

$$\begin{aligned} \hat{\eta} &= 0 \quad \text{sur} \quad \Delta_1 , \\ \hat{\eta} &= 1 \quad \text{sur} \quad \Delta_2 \end{aligned}$$

et il est immédiat de vérifier que $(\mu - \delta_o + \eta)$ est inversible et que :

$$\mu = \eta * (\mu - \delta_o + \eta) \qquad (3).$$

<u>Conséquences</u> : si $S_\mu \in \Omega$ et si $\mu * L^1$ est fermé, alors d'après (3), zéro n'est pas point d'accumulation dans $\{\hat{\mu}(\Gamma)\} \cup \{0\}$.

Partant du théorème 2, nous devons envisager l'éventualité d'une généralisation du théorème de Cohen sur les mesures idempotentes (voir

chap. I), aux mesures μ pour lesquelles $\{0\}$ est isolé dans $\hat{\mu}(\Gamma) \cup \{0\}$; en d'autres termes, il s'agit de savoir si, pour de telles mesures μ, le support S_μ appartient à Ω ? Avant de répondre à cette question, nous considérerons au préalable quelques cas particuliers simples.

3. Proposition.

Soient $\mu \in M(G)$ et $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant :

$$\{|\hat{\mu}(\gamma)| \neq 0 \ , \ \gamma \in \Gamma\} = \{a_i\}_{i=1}^N \ .$$

Alors $S_\mu \in \Omega$.

Démonstration : Posons $\mu * \tilde{\mu} = \theta$, où $\tilde{\mu}(E) = \overline{\mu(-E)}$; alors : $\{\hat{\theta}(\gamma) \neq 0 \ , \ \gamma \in \Gamma\} = \{|a_i|^2\}_{i=1}^N$. Soit P_i un polynôme vérifiant : $P_i(|a_i|^2) = 1$, $P_i(|a_j|^2) = 0 \ \forall j \neq i$ et $P_i(0) = 0$; et posons : $\theta_i = P_i(\theta)$. Alors :

$$\hat{\theta}_i(\gamma) = P_i(\hat{\theta}(\gamma)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \hat{\theta}(\gamma) = |a_i|^2 \\ 0 & \text{si} \quad \hat{\theta}(\gamma) \neq |a_i|^2 \end{cases} \ .$$

Les mesures θ_i sont donc idempotentes et vérifient :

$$\theta = |a_1|^2 \theta_1 + \ldots + |a_N|^2 \theta_N^2 \quad ; \quad (1)$$

Comme la suite $\{a_i\}_{i=1}^N$ est une suite de nombres distincts, il en résulte que $S_{\theta_i} \cap S_{\theta_j} \neq \emptyset \ \forall i \neq j$ et (1) implique alors :

$$S_\mu = S_\theta = \bigcup_{i=1}^N S_{\theta_j} \in \Omega \ .$$

C.Q.F.D.

Soit $S \subset \Gamma$. Nous dirons que S est un ensemble "presque-négligeable", s'il a la propriété :

$S \cap (\gamma - S)$ est de mesure de Haar finie, $\forall \gamma \in \Gamma$.

Tout ensemble S de mesure de Haar finie est "presque-négligeable" ; toute demi-droite $S = [a, +\infty[$ dans $\mathbb{Z}$ en est encore un ;

et il suffit d'appliquer le théorème d'inversion dans le premier cas, et celui de F.M. Riesz dans le second, pour affirmer que toute mesure $\mu \in M(G)$ dont la transformée Stieljes s'annule en dehors de S est absolument continue.

Il existe une généralisation de ce fait due à I. Glicksberg [9]. Plus précisément, si μ est telle que $\hat{\mu}$ s'annule en dehors d'un ensemble presque-négligeable, alors $\mu*\mu$ est <u>absolument continue</u>. Par conséquent, si zéro est isolé dans $\hat{\mu}(\Gamma) \cup \{0\}$, il le sera aussi dans $\hat{\mu}^2(\Gamma) \cup \{0\}$, et le lemme (II.C.3) implique :

$$S_{\mu*\mu} = S_\mu \in \Omega .$$

Nous avons considéré de tels ensembles, parce qu'ils ne sont en général pas dans le clan Ω des classes d'équivalence. Si nous considérons par exemple comme groupe dual $\mathbb{Z}$, nous savons que $E \subset \mathbb{Z}$, appartient à Ω, si, et seulement si, E est fini ou diffère d'une progression arithmétique <u>infinie dans les deux sens</u>, au plus par un ensemble fini d'entiers [1, p. 61].

Dans ce même cas particulier, où $\Gamma = \mathbb{Z}$, il y a d'autres ensembles $E \subset \mathbb{Z}$, qui n'appartiennent pas à Ω : les suites lacunaires $\{\pm n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, où $n_{k+1} \geq q n_k$, $q > 1$. Dans ce qui suit nous considèrerons une famille plus large que celle des suites lacunaires.

4. <u>Proposition</u>.

<u>Soient</u> $\mu \in M(T)$ <u>et</u> $S = \{n_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ <u>une suite croissante dans</u> $\mathbb{Z}$ <u>vérifiant</u> :

$$(n_{i+1} - n_i) \xrightarrow[i\to\pm\infty]{} +\infty \quad , \quad n_o = 0 .$$

<u>Alors si</u> $S_\mu \subset S$, μ <u>est une mesure continue</u>.

<u>Démonstration</u> : μ est continue si, et seulement si : $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{2N} \sum_{|n|\leq N} |\hat{\mu}(n)|^2 = 0$. Or, les hypothèses que vérifient la suite S nous permettent d'affirmer que pour :

$$\forall P \in \mathbb{N} \ , \ \exists i \in \mathbb{N} \ , \ \forall j \geq 2i : (n_{j+1} - n_j) > 2P \ .$$

Par conséquent :

$$\forall P \in \mathbb{N} \ , \ \exists i \in \mathbb{N} \ , \ \forall j \geq 2i : \frac{n_j}{2P} > j$$

Donc,

$$\frac{1}{2n_j} \sum_{0<n\leq n_j} |\hat{\mu}(n)|^2 \leq \frac{1}{2n_j} \cdot \frac{n_j}{2P} \cdot \|\hat{\mu}\|_\infty = \frac{1}{4P} \|\hat{\mu}\|_\infty \ .$$

Soit maintenant $N \geq n_{2i}$; alors il existe $j \geq 2i$ vérifiant :

$$n_j \leq N < n_{j+1}$$

d'où :

$$\frac{1}{2N} \sum_{n\leq N} |\hat{\mu}(n)|^2 = \frac{1}{2N} \sum_{n\leq n_j} |\hat{\mu}(n)|^2 \leq \frac{\|\hat{\mu}\|_\infty}{4P} \ .$$

Donc,

$\frac{1}{2N} \sum_{n\leq N} |\hat{\mu}(n)|^2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$; pour les mêmes raisons :

$\frac{1}{2N} \sum_{n\geq -N} |\hat{\mu}(n)|^2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$.

C.Q.F.D.

Corollaire.

Soit $\mu \in M(T)$ et S une suite dans $\mathbb{Z}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 4. Si zéro est isolé dans $\hat{\mu}(\mathbb{Z}) \cup \{0\}$, alors μ est absolument continue.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 4 et du lemme (II.D.3).

Nous verrons cependant qu'il existe des mesures $\mu \in M(T)$, telles que $S_\mu \notin \Omega$ et pour lesquelles zéro est isolé dans $\hat{\mu} \cup \{0\}$. En fait, les cas particuliers étudiés ci-dessus ne préjugent pas du résultat, mais servent à justifier une méthode "probabiliste" que nous exposerons.

5. Définition.

Un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est de Sidon si pour toute suite bornée $(d_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ il existe une mesure $\mu \in M(T)$ telle que $\hat{\mu}(\lambda) = d_\lambda$ pour $\lambda \in \Lambda$.

6. Lemme.

Si $\Lambda \subset \mathbb{Z}$ est un ensemble de Sidon, alors il existe $k > 0$ tel que pour toute suite bornée $(d_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, il existe une mesure $\mu \in M(T)$ vérifiant :

$$\hat{\mu}(\lambda) = d_\lambda \quad , \quad \forall\lambda \in \Lambda$$

$$\|\mu\| < k \sup|d_\lambda| \ .$$

Démonstration : Soit $B(\Lambda) = M(T)/I(\Lambda)$ où $I(\Lambda)$ désigne l'idéal fermé :

$$I(\Lambda) = \{\mu\in M(T) : \hat{\mu}(\lambda)=0 \ , \ \forall\lambda \in \Lambda\} \ .$$

$B(\Lambda)$ muni de la norme quotient est un espace de Banach ; et puisque Λ est de Sidon, il suffit d'appliquer le théorème du graphe fermé pour vérifier que l'opérateur linéaire

$$T : \ell^\infty(\Lambda) \to B(\Lambda) \quad \text{est continu.}$$

C.Q.F.D.

7. Lemme.

Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, un ensemble de Sidon. Il existe $C > 0$, tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mu \in M(T)$ vérifiant :

1) $\hat{\mu}(\lambda) = 1 \ , \quad \forall\lambda \in \Lambda$

2) $|\hat{\mu}(n)| \leq \varepsilon \ , \quad \forall n \notin \Lambda$

3) $\|\mu\| \leq \varepsilon^{-1}.C$

Puisque Λ est dénombrable on peut le présenter comme une suite $(\lambda_k)_{k\geq1}$. Considérons $\Lambda_k = (\lambda_1,\ldots,\lambda_k)$ et soit $(\mu_k)_{k\geq1}$ une

suite dans $M(T)$ vérifiant les propriétés 1), 2) et 3) ; de cette suite on peut extraire une sous-suite qui converge vers une mesure $\mu \in M(T)$ pour la topologie $\sigma(M(T),\mathcal{C}(T))$; il est clair qu'une telle mesure μ vérifiera encore les propriétés 1), 2) et 3).

L'existence de la suite $(\mu_k)_{k\geq 1}$ sera établie en plusieurs étapes.

a) Pour k fixé, notons Ω le groupe multiplicatif <u>fini</u> : $\prod_{i=1}^{k} Z_i(2)$ où $Z_i(2) = \{-1,+1\}$, et soit Γ son dual, c'est-à-dire le groupe additif des suites :

$$\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_k) \quad \text{où} \quad \gamma_i = 0 \text{ ou } 1 \ , \ 1 \leq i \leq k \ .$$

Toute fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ admet une série de Fourier :

$$f(\omega) = \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} C(\gamma_1,\dots,\gamma_k)\omega_1^{\gamma_1}\dots\omega_k^{\gamma_k}$$

et la formule de Parseval implique :

$$\int_\Omega |f(\omega)|^2 d\omega = \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)} |C(\gamma_1,\dots,\gamma_k)|^2 \ .$$

b) D'après le lemme 6, il existe une constante $K > 0$, <u>indépendante de</u> k, telle que pour tout $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_k) \in \Omega$, il existe $\nu_\omega \in M(T)$ vérifiant :

$$\|\nu_\omega\| \leq K$$

$$\hat{\nu}_\omega(\lambda_j) = \omega_j \ , \quad 1 \leq j \leq k \ .$$

Considérons la mesure $\mu_\omega = \int_\Omega \nu_{\omega/\omega'} * \nu_{\omega'} d\omega'$; alors :

$$\|\mu_\omega\| \leq \int_\Omega \|\nu_{\omega/\omega'}\| \times \|\nu_{\omega'}\| d\omega' \leq K^2$$

et,

$$\hat{\mu}_\omega(\lambda_j) = \int_\Omega \hat{\nu}_{\omega/\omega'}(\lambda_j) \times \hat{\nu}_{\omega'}(\lambda_j) d\omega' = \int_\Omega \omega_j \omega_j'^{-1} . \omega_j' d\omega' = \omega_j \ .$$

Pour n <u>fixé</u>, $\hat{\nu}_\omega(n)$ est une fonction : $\Omega \to \mathbb{C}$, égale à sa série de Fourier :

$$\hat{\nu}_\omega(n) = \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)\in\Gamma} d(n\,;\gamma_1,\dots,\gamma_k)\omega_1^{\gamma_1}\dots\omega_k^{\gamma_k} \quad ;$$

et la formule de Parseval implique :

$$\sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)\in\Gamma} |d(n\,;\gamma_1,\dots,\gamma_k)|^2 = \int_\Omega |\nu_\omega(n)|^2 d\omega \le K^2 \ .$$

Il en sera de même pour $\hat{\mu}_\omega(n)$. Soit :

$$\hat{\mu}_\omega(n) = \sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)\in\Gamma} C(n\,;\gamma_1,\dots,\gamma_k)\omega_1^{\gamma_1}\dots\omega_k^{\gamma_k} \quad ,$$

or,

$$C(n\,;\gamma_1,\dots,\gamma_k) = d^2(n\,;\gamma_1,\dots,\gamma_k) \quad ;$$

donc :

$$\sum_{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)\in\Gamma} |C(n\,;\gamma_1,\dots,\gamma_k)| \le K^2 \ .$$

c) Pour $\omega \in \Omega$, <u>fixé</u>, considérons le produit de Riesz $R_\omega : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ défini par :

$$R_\omega(t) = -1 - i + \prod_1^k (1+\varepsilon\omega_j\cos\lambda_j t) + i\prod_1^k (1+\varepsilon\omega_j\sin\lambda_j t) \ .$$

Pour $\varepsilon < 1$, $\prod_1^k (1+\varepsilon\omega_j\cos\lambda_j t) > 0$; de même $\prod_1^k (1+\varepsilon\omega_j\sin\lambda_j t) > 0$; d'autre part, il est très simple de vérifier que pour t <u>fixé</u>,

$$\int_\Omega \prod_1^k (1+\varepsilon\omega_j\sin\lambda_j t).d\omega = 1 \quad ,$$

donc,

$$\int_\Omega |R_\omega(t)|d\omega \le 4 \ .$$

Par ailleurs,

$$R_\omega(t) = \varepsilon\sum_{j=1}^k \omega_j e^{i\lambda_j t} + \varepsilon^2 \sum_{\substack{(\gamma_1,\dots,\gamma_k)\\ \gamma_1+\dots+\gamma_k\ge 2}} r(\gamma_1,\dots,\gamma_k\,;t)\omega_1^{\gamma_1}\dots\omega_k^{\gamma_k} \quad , \text{ où}$$

$r(\gamma_1,\dots,\gamma_k\,;\,t)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, vérifiant :

$$|r(\gamma_1,\dots,\gamma_k\,;\,t)| \le 2 \ .$$

Par conséquent,

$$\hat{R}_\omega(n) = \varepsilon \sum_{j=1}^{k} \omega_j \delta(n-\lambda_j) + \varepsilon^2 \sum_{\substack{(\gamma_1,\dots,\gamma_k) \\ \gamma_1+\dots+\gamma_k \ge 2}} \alpha_{\gamma_1\dots\gamma_k}(n)\omega_1^{\gamma_1}\dots\omega_k^{\gamma_k} \ ,$$

où : $$|\alpha_{\gamma_1,\dots,\gamma_k}(n)| \le 2 \ .$$

d) Posons $\mu = \int_\Omega \mu_\omega * R\omega \, d\omega$.

Alors,

$$\|\mu\| \le \int_\Omega \|\mu_\omega\| \ \|R\omega\| d\omega \le 4K^2 \ ,$$

tandis que :

$$(4)\quad \hat{\mu}(n) = \int_\Omega \hat{\mu}_\omega(n)\hat{R}\omega(n)d\omega = \varepsilon \sum_{1}^{k} \delta(n-\lambda_j)\int_\Omega \hat{\mu}_\omega(n)d\omega + \varepsilon^2 \sum_{\substack{(\gamma_1,\dots,\gamma_k) \\ \gamma_1+\dots+\gamma_k \ge 2}} \alpha_{\gamma_1\dots\gamma_k}(n)\int_\Omega \hat{\mu}_\omega(n)\omega_1^{\gamma_1}\dots\omega_k^{\gamma_k}d\omega$$

ou encore :

$$(5)\quad \hat{\mu}(n) = \varepsilon \sum_{1}^{k} \delta(n-\lambda_j)\int_\Omega \hat{\mu}_\omega(n)d\omega + \varepsilon^2 \sum_{\substack{(\gamma_1,\dots,\gamma_k) \\ \gamma_1+\dots+\gamma_k \ge 2}} \alpha_{\gamma_1\dots\gamma_k}(n)C(n\,;\gamma_1,\dots,\gamma_k) \ .$$

Il est facile de vérifier à partir de (4) que si $n = \lambda_j$, alors :

$$\hat{\mu}(n) = \varepsilon \ ,$$

et à partir de (5), que si $n \notin \Lambda_k$, alors :

$$|\hat{\mu}(n)| \le 2\varepsilon^2 . K^2 \ .$$

Considérons $\theta = \varepsilon^{-1}\mu$; θ vérifie :

$$\hat{\theta}(\lambda_j) = 1 \ , \quad 1 \le j \le k$$

$$|\hat{\theta}(n)| \leq 2\varepsilon K^2 \quad , \quad n \notin \Lambda_k$$

$$\|\theta\| \leq 4\varepsilon^{-1}K^2$$

et en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2K^2}$, nous obtiendrons une mesure μ_k vérifiant 1), 2) et 3).

8. Corollaire.

Soit $\Lambda \subset \mathbb{Z}$, un ensemble de Sidon. Il existe une mesure $\mu \in M(T)$ vérifiant :

$$|\hat{\mu}(\lambda)| \geq \frac{1}{2} \quad , \quad \forall \lambda \notin \Lambda$$

$$\hat{\mu}(\lambda) = 0 \quad , \quad \forall \lambda \in \Lambda \ .$$

Démonstration : Soit $\theta \in M(T)$, une mesure vérifiant les conditions 1) , 2) et 3) du lemme 7 avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Alors : $\mu = \delta - \theta$ convient.

CHAPITRE IV

TRANSFORMEES DE FOURIER-STIELTJES DES COMPOSANTES D'UNE MESURE

Soit G un groupe abélien localement compact, et $M(G)$ l'algèbre des mesures de Radon bornées sur G. Nous savons que toute mesure $\mu \in M(G)$ s'écrit de manière unique :

$$\mu = \mu_c + \mu_d \qquad (1)$$

où $\mu_c \in M_c(G)$ et $\mu_d \in M_d(G)$. (voir Chap. I).

Si μ est une mesure idempotente, alors

$$\mu^2 = \mu = \mu_c^2 + \mu_d^2 + \mu_c * \mu_d ,$$

où μ_c^2 et $\mu_c * \mu_d$ sont des mesures continues ; donc $\mu_d = \mu_d^2$ et μ_d est aussi une mesure idempotente. Le but de ce chapitre est de vérifier, d'abord, que zéro est isolé dans $\hat{\mu}_d(\Gamma) \cup \{0\}$, pour toute mesure $\mu \in M(G)$ pour laquelle zéro est isolé dans $\hat{\mu}(\Gamma) \cup \{0\}$; de montrer ensuite que pour de telles mesures μ, il existe un sous-groupe compact $H \subset G$, telle que μ_H, la partie de μ portée par les classes d'équivalence modulo H, est égale au produit de convolution d'une mesure idempotente (non nulle) et d'une mesure inversible.

A - SUR LA COMPOSANTE DISCRETE D'UNE MESURE.

1. Théorème.

Toute mesure $\mu \in M(G)$ vérifie :

$$\hat{\mu}_d(\Gamma) \subset \overline{\hat{\mu}(\Gamma)} \quad .$$

Démonstration : Posons $\mu = \mu_c + \mu_d$, comme en (1) ; et soit $\gamma_o \in \Gamma$. Il est clair, que pour toute suite $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1} \in \Gamma$, la fonction $h(\gamma) = \sum_{j=1}^{n-1} |\hat{\mu}_c(\gamma_o+\gamma-\gamma_j)|^2$ est la transformée de Fourier-Stieltjès d'une mesure continue. En appliquant le corollaire (I.A.6), nous obtenons :

$$\inf_{\gamma\in\Gamma} h(\gamma) = 0 .$$

Un raisonnement par récurrence nous permet alors d'affirmer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une suite $\{\gamma_n\}_1^\infty \in \Gamma$, vérifiant :

$$|\hat{\mu}_c(\gamma_o+\gamma_n-\gamma_j)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad j < n .$$

Posons $\mu_d = \sum_1^\infty a_p \delta_{x_p}$, où $\sum_1^\infty |a_p| < +\infty$; alors :

$$\hat{\mu}_d(\gamma) = \sum_1^\infty a_p \hat{\delta}_{x_p}(\gamma) = \sum_1^\infty a_p \langle -x_p, \gamma \rangle .$$

Considérons N suffisamment grand pour que $\sum_{N+1}^\infty |a_p| < \varepsilon$ et choisissons une sous-suite $\{\gamma_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ vérifiant :

$$\langle -x_p, \gamma_{n_k} \rangle \to C_p \quad , \ 1 \le p \le N .$$

Pour de tels entiers p , $|1-\langle -x_p, \gamma_{n_h}-\gamma_{n_k} \rangle| \to 0$ pour h et k tendant vers l'infini. Par conséquent, pour k suffisamment grand et $h > k$:

$$|\hat{\mu}_d(\gamma) - \hat{\mu}_d(\gamma+\gamma_{n_h}-\gamma_{n_k})| < 2\varepsilon + \sum_{p=1}^{N} |a_p||1-\langle -x_p, \gamma_{n_h}-\gamma_{n_k} \rangle| < 3\varepsilon$$

d'où

$$|\hat{\mu}_d(\gamma_o) - \hat{\mu}(\gamma_o+\gamma_{n_h}-\gamma_{n_k})| \le |\hat{\mu}_d(\gamma_o) - \hat{\mu}_d(\gamma_o+\gamma_{n_h}-\gamma_{n_k})| + |\hat{\mu}_c(\gamma_o+\gamma_{n_h}-\gamma_{n_k})$$

$$< 4\varepsilon .$$

C.Q.F.D.

En fait, ce résultat reste vrai, si au lieu de considérer μ_d , on considérait la partie μ_H de μ , portée par les classes d'équivalence modulo H , où H est un sous-groupe fermé de G .

2. Corollaire.

Pour toute mesure $\mu \in M(G)$, $\hat{\mu}_H(\Gamma) \subset \overline{\hat{\mu}(\Gamma)}$.

Démonstration : Soit ρ l'application de $M(G)$ dans $M(G/H)$ induite par l'application canonique $G \to G/H$, et $\rho^*\mu$ l'image de μ , dans $M(G/H)$. Nous savons que le dual de G/H est $H^\perp$, tandis que :

$$(\rho^*\mu)\hat{} = \hat{\mu}|H^\perp .$$

D'autre part, il est clair que : $(\rho^*\mu)_d = \rho^*\mu_H$; par conséquent, le théorème A.1 implique

$$(\rho^*\mu)\hat{}_d(H^\perp) = \hat{\mu}_H(H^\perp) \subset \overline{\hat{\mu}(H^\perp)} .$$

Soit maintenant $\gamma \in \Gamma$, et considérons au lieu de μ , la mesure $\overline{\gamma}.\mu$; alors :

$$(\overline{\gamma}.\mu)_H = \overline{\gamma}.\mu_H$$

et

$$(\overline{\gamma}.\mu_H)\hat{}(H^\perp) = \hat{\mu}_H(\gamma+H) \subset \overline{(\overline{\gamma}.\mu)\hat{}(H^\perp)} = \overline{\hat{\mu}(\gamma+H^\perp)} .$$

C.Q.F.D.

B - TRANSFORMEES DE FOURIER-STIELTJES A ZERO ISOLE.

Soit H un sous-groupe fermé de G . Il est clair que toute mesure $\mu \in M(G)$ se décompose d'une manière unique sous la forme :

$$\mu = \mu_H + \mu'$$

où μ_H est portée par les classes d'équivalence modulo H , et μ' s'annule sur tout borélien inclus dans une classe d'équivalence (on procède exactement de la même façon que lorsque H est réduit au sous-groupe trivial $\{0\}$; auquel cas $\mu_H + \mu' = \mu_d + \mu_c$) .

Pour plus de commodité, la loi de groupe dans Γ , dual de G , sera notée multiplicativement, tandis que la transformée de Fourier-Stieltjès sera définie par :

$$\hat{\mu}(\gamma) = \int_G \langle x,\gamma\rangle d\mu(x) .$$

1. Lemme.

Soit $\mu \in M(G)$ et E une famille de fonctions mesurables sur G, unimodulaire, pour laquelle la fermeture faible $(E.\mu)^-$ pour la topologie $\sigma(M;C_o(G))$ est une famille de mesures de norme égale à $\|\mu\|$. Alors la topologie faible et la topologie induite par la norme de $M(G)$, coïncident sur $(E.\mu)^-$.

Démonstration : En tenant compte de toutes les hypothèses, il est facile de vérifier que la fermeture faible $(E.\mu)^-$ est égale à l'ensemble $(E_o.\mu)$ où E_o est une famille de fonctions mesurables unimodulaires. Soit alors $e_\delta.\mu$ un filtre d'éléments de $E.\mu$, convergeant faiblement vers $e.\mu$, et posons $\mu = \theta|\mu|$, où $|\theta| = 1$; il est clair que le filtre $e_\delta\theta$ converge faiblement dans $L^2|\mu|$ vers la fonction $e.\theta$. Or dans un espace de Hilbert, la convergence faible sur une sphère implique la convergence en norme. Par conséquent :

$$e_\delta.\theta \xrightarrow{\|.\|_2} e\theta$$

et puisque μ est bornée,

$$e_\delta.\theta \xrightarrow{\|.\|_1} e\theta$$

d'où :

$$\|e_\delta.\theta.|\mu| - e.\theta.|\mu|\| = \|e_\delta.\mu - e\mu\|_{M(G)} \longrightarrow 0$$

donc tout filtre qui converge faiblement converge fortement.

C.Q.F.D.

2. Lemme [11].

Soit G un groupe abélien compact et H un sous-groupe fermé. Si $\nu \in M(G)$ s'annule sur tout borélien inclus dans une classe d'équivalence, alors il existe un filtre d'éléments β_δ dans $H^\perp$ vérifiant :

$$\beta_\delta\nu \to 0 \text{ faiblement dans } M(G) .$$

Considérons maintenant une mesure $\mu \in M(G)$, vérifiant :

$$|\hat{\mu}(\gamma)| \geq 1 \quad \text{où} \quad \hat{\mu}(\gamma) = 0 \quad \text{pour} \quad \forall\gamma \in \Gamma \qquad (1)$$

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

3. Théorème.

Soit G un groupe abélien localement compact et $\mu \in M(G)$, vérifiant (1) ; alors il existe un sous-groupe compact H de G et des caractères $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tels que :

$$\mu_H = \eta * \lambda \text{ , où } \eta = (\sum_{i=1}^{n} \gamma_i) m_H \text{ et } \lambda \text{ inversible.}$$

(nous notons m_H la mesure de Haar normalisée du sous-groupe H) .

Nous ferons la démonstration dans le cas où G est compact ; nous montrerons ensuite qu'on peut toujours se ramener à ce cas-là.

Démonstration : Soit $E_\mu = \{\gamma \in \Gamma : |\hat{\mu}(\gamma)| \geq 1\}$ le support de $\hat{\mu}$. Les conventions adoptées au début de ce chapitre nous permettent d'affirmer que :

$$|(\gamma . \mu)(1)| = |\hat{\mu}(\gamma)| \geq 1 \quad \text{pour} \quad \forall \gamma \in E_\mu .$$

Nous supposons bien entendu $\mu \neq 0$. Par conséquent, toute mesure $\nu \in (E_\mu . \mu)^-$, adhérence faible de $E_\mu . \mu$ est différente de zéro. Il est clair d'autre part que ν vérifie (1) . Posons alors : $\nu = \lim_\delta \gamma_\delta . \mu$, et soit $\gamma \in E = E_\nu$.

Puisque $\gamma \in E$, il existe δ_o tel que $\delta \geq \delta_o$ implique $\gamma . \gamma_\delta \in E_\mu$; donc :

$$\gamma . \nu = \lim_\delta \gamma . \gamma_\delta . \mu \in (E_\mu . \mu)^-$$

et par suite :

$$E . \nu \subset (E . \nu)^- \subset (E_\mu . \mu)^- .$$

Or $\mu \to \|\mu\|$ est vaguement (i.e. faiblement, car G compact) semi-continue inférieurement ; et comme $0 \notin (E_\mu . \mu)^-$, il existe alors une mesure $\nu \in (E_\mu . \mu)^-$ dont la norme réalise le minimum sur le compact $(E_\mu . \mu)^-$. Pour une telle mesure ν il est évident que tout élément de $(E_\nu . \nu)^- = (E . \nu)^-$ est de norme égale à $\|\nu\|$. Le lemme 1 implique

que $(E.\nu)^-$ est compacte pour la topologie induite par la norme de $M(G)$. E étant le support de $\hat{\nu}$, et ν vérifiant (1) il est clair que si $|\nu(\alpha\gamma) - \nu(\beta\gamma)| < 1$, alors :

$$\alpha\gamma \in E \Leftrightarrow \beta\gamma \in E \text{ , pour } \alpha,\beta,\gamma \in \Gamma .$$

Par conséquent, si $\|\alpha\nu-\beta\nu\| < 1$, alors $(\alpha\nu)\hat{}$ et $(\beta\nu)\hat{}$ ont même support $\alpha^{-1}E = \beta^{-1}E$. Il est clair, en outre, que $\alpha^{-1}E = \beta^{-1}E$ définit une relation d'équivalence $(\sim)$ sur E ; et puisque $(E.\nu)^-$ est compacte pour la topologie forte on peut alors recouvrir E par un nombre fini de classes d'équivalence $E_1,\ldots,E_n$.

De plus pour tout $i \leq n$, $\alpha \sim \beta$ implique :

$$\alpha^{-1}E_i = \beta^{-1}E_i \quad . \tag{2}$$

En effet, si $\gamma \in E_i$, $\alpha^{-1}\gamma \in \alpha^{-1}E = \beta^{-1}E$; ainsi $\alpha^{-1}\gamma = \beta^{-1}\sigma$ pour $\sigma \in E$; d'où

$$\sigma = \beta\alpha^{-1}\gamma \in E$$

or $\sigma^{-1}E = (\beta^{-1}\alpha)\gamma^{-1}E = \gamma^{-1}E$ et $\sigma \sim \gamma$, donc $\sigma \in E_i$ et $\alpha^{-1}\gamma \in \beta^{-1}E_i$; soit :

$$\alpha^{-1}E_i \subset \beta^{-1}E_i$$

et (2) est établi.

On déduit facilement de (2) que les classes E_i pour la relation $\sim$, sont en fait des classes d'équivalence modulo $H^\perp$, où H est un sous-groupe fermé de G . Par conséquent, il existe $\gamma_1,\ldots,\gamma_n \in H^\perp$ vérifiant :

$$E = E_\nu = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i H^\perp$$

donc

$$\nu = \eta * \nu \quad ,$$

où η est la mesure idempotente $(\sum_{i=1}^{n} \bar{\gamma}_i)m_H$, m_H étant la mesure de Haar normalisée de H .

Mais les opérateurs de translation et de convolution commutent ; et puisque $\eta \ll m_H$, on déduit du théorème (I.A.4), que l'application

$$h \to \delta_h * \nu \tag{3}$$

est continue sur H , dans $(M(G), \|\cdot\|_{M(G)})$.

Une conséquence de (3) est que tout filtre d'éléments $\{\gamma_\delta\}$ dans E_μ , pour lequel $\gamma_\delta\mu \to \nu$ faiblement n'admet aucun sous-filtre cofinal tel que $\gamma_\delta H^\perp \to \infty$ dans $\Gamma/H^\perp$. En effet, en procédant exactement comme pour la décomposition de Lebesgue, on peut écrire μ sous la forme :

$$\mu = \rho + \sigma$$

où la mesure ρ vérifie : $h \to \delta_h * \rho$ est continue sur H dans $(M(G), \|\cdot\|_{M(G)})$, tandis que σ est orthogonale à toute mesure vérifiant cette propriété de continuité. D'autre part, la continuité de $h \to \delta_h * \rho$ implique que la mesure ρ peut être approchée aussi près qu'on veut, en norme, par des mesures de la forme $\rho * f.m_H$, où $f \in L^1(H)$. Supposons maintenant qu'il existe un sous-filtre cofinal $\{\gamma_\delta\}$ vérifiant :

$$\gamma_\delta . H^\perp \to \infty \quad \text{dans} \quad \Gamma/H^\perp = \hat{H} .$$

Alors $\gamma_\delta f.m_H \underset{\delta}{\to} 0$; donc $\gamma_\delta \rho * \gamma_\delta f.m_H \underset{\delta}{\to} 0$ aussi . Par conséquent :

$$\gamma_\delta \rho \underset{\delta}{\to} 0 ,$$

et

$$\nu = \lim \gamma_\delta \mu = \lim \gamma_\delta \sigma .$$

Soit maintenant g appartenant à l'adhérence faible $\{\gamma_\delta\}^-$ de $\{\gamma_\delta\}$ dans $L^\infty(|\sigma|)$; il est clair que $g\sigma \in \{\gamma_\delta . \sigma\}^-$, adhérence faible de $\{\gamma_\delta . \sigma\}$ dans $M(G)$; donc $\nu = g\sigma$, et ν , comme σ , est orthogonale à toutes les mesures λ pour lesquelles $h \to \delta_h * \lambda$ est continue sur H , dans $(M(G), \|\cdot\|_{M(G)})$. En particulier, la mesure ν , qui est différente de zéro, serait orthogonale à elle-même, puisqu'elle vérifie (3) ; ce qui est absurde. On en déduit, en particulier, qu'il existe un filtre d'éléments $\{\gamma_\delta\}$ vérifiant :

$$\gamma_\delta \mu \to \nu \quad \text{faiblement} , \quad \text{et} \quad \gamma_\delta \in E_\mu \cap \gamma_o . H^\perp . \qquad (4)$$

Considérons maintenant pour le sous-groupe H , la décomposition de μ annoncée au début de la partie B ; soit :

$$\mu = \mu_H + \mu' .$$

On peut affirmer, en considérant au besoin un filtre plus fin que le filtre $\{\gamma_\delta\}$ figurant dans (4) , que $\{\bar{\gamma}_o \cdot \gamma_\delta\}$ converge ponctuellement sur G vers un caractère χ de $(G/H)^d$; donc :

$$\gamma_\delta \mu_H \xrightarrow[\delta]{} \gamma_o \chi \mu_H \text{ , faiblement}$$

et $\gamma_\delta \mu' \to \nu'$ faiblement, où ν' est absolument continue par rapport à $|\mu'|$, et par conséquent s'annule sur tout borélien inclus dans une classe d'équivalence modulo H . Le lemme 2 implique alors l'existence d'un filtre d'éléments $\{\beta_\rho\}$ dans $H^\perp$ vérifiant : $\beta_\rho \nu' \to 0$ faiblement ; par suite, pour tout γ_1 tel que $\gamma_1 H^\perp \subset E_\nu$, le filtre $\gamma_1 \beta_\rho \nu'$ tend vers zéro faiblement ; et puisque $\nu = \gamma_o \chi \mu_H + \nu'$, alors toute mesure λ appartenant à la fermeture-faible de $\{\gamma \beta_\rho \nu\} \subset E_\nu \cdot \nu$ est une mesure qui appartient à la fermeture-faible de $\{\gamma_1 \beta_\rho \gamma_o \chi \mu_H\}$. Donc :

$$\|\lambda\| \leq \|\gamma_o \chi \mu_H\| \text{ ,}$$

et puisque tous les éléments de $(E_\nu \cdot \nu)^-$ sont de norme égale à $\|\nu\|$, il en résulte :

$$\|\lambda\| = \|\nu\| \leq \|\gamma_o \chi \mu_H\| \leq \|\gamma_o \chi \mu_H\| + \|\nu'\| = \|\nu\|$$

puisque $\nu' \perp \gamma_o \chi \mu_H$. D'où

$$\nu' = 0 \quad \text{et} \quad \gamma_\delta \mu' \to 0 \quad \text{faiblement .}$$

Donc

$$\gamma_o \chi \mu_H = \lim \gamma_\delta \mu_H = \lim \gamma_\delta \mu = \nu \quad .$$

Ceci étant, nous savons déjà que $E = E_\nu = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i H^\perp$; donc $H^\perp E_\nu = E_\nu$. Soit alors $\beta_\delta = \gamma_o \bar{\gamma}_\delta$, et γ_1 vérifiant $\gamma_1 H^\perp \subset E_\nu$. Nous avons vu aussi que :

$$\beta_\delta \to \bar{\chi} \text{ ponctuellement}$$

et

$$\beta_\delta \gamma_1 \in E_\nu \text{ .}$$

D'où : $\beta_\delta \gamma_1 \nu = \beta_\delta \gamma_1 \gamma_o \chi \mu_H \in E_\nu \cdot \nu$, et $\gamma_1 \gamma_o \mu_H = \lim_\delta \beta_\delta \gamma_1 \nu \in (E_\nu \cdot \nu)^- \subset (E_\mu \cdot \mu)^-$

Ainsi $\gamma_1 \gamma_o \mu_H$ est aussi un élément de $(E_\mu \cdot \mu)^-$ de norme minimale, égale à $\|\nu\|$.

En procédant exactement comme pour ν , nous pouvons affirmer que la transformée de Fourier-Stieltjès $(\gamma_1\gamma_o\mu_H)\hat{}$ a pour support :

$$\bigcup_{j=1}^{m} \beta_j H_1^{\perp} \text{ , où } \beta_1,\dots,\beta_m \in \Gamma$$

où H_1 est un sous-groupe fermé de G . En particulier

$$\gamma_1\gamma_o\mu_H = \eta_1 * \gamma_1\gamma_o\mu_H \quad \text{où} \quad \eta_1 = (\sum_{j=1}^{m} \bar{\beta}_j)m_{H_1} .$$

Nous allons maintenant vérifier que H et H_1 peuvent être considérés comme étant le même sous-groupe. En effet :

$$\gamma_1\gamma_o\mu_H \in (E_\nu \cdot \nu)^- \Rightarrow \exists\{\beta_\delta\} \in E_\nu = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_i H^{\perp} \text{ , tel que } \beta_\delta\nu \underset{\delta}{\to} \gamma_1\gamma_o\mu_H ;$$

de plus nous pouvons bien entendu supposer que le filtre $\{\beta_\delta\}$ appartient à une seule classe $\gamma_k H^{\perp}$. Or le support de $(\beta_\delta\nu)\hat{}$ est égal à $\bigcup_{i=1}^{n} \gamma_k\gamma_i H^{\perp}$; donc le support de $(\gamma_1\gamma_o\mu_H)\hat{}$ est égal à :

$$\bigcup_{j=1}^{m} \beta_j H_1^{\perp} = \bigcup_{i=1}^{n} \gamma_k\gamma_i H^{\perp} ;$$

Ceci implique que le sous-groupe $H^{\perp}$ est inclus dans une union finie de classes d'équivalence modulo $H_1^{\perp}$, et vice-versa ; d'autre part, l'union finie des classes d'équivalence modulo $H_1^{\perp}$ qui rencontrent $H^{\perp}$ (ou ceux de $H^{\perp}$ qui rencontrent $H_1^{\perp}$) forme un sous-groupe de Γ : $H_2^{\perp} = H^{\perp} + H_1^{\perp}$, par rapport auquel $H^{\perp}$ et $H_1^{\perp}$ sont d'indice fini. Donc le sous-groupe fermé H_2 de G , est d'indice fini dans les sous-groupes H et H_1 . Par conséquent, $\mu_H = \mu_{H_2}$, et $(\gamma_1\gamma_o\mu_H)\hat{} = (\gamma_1\gamma_o\mu_{H_2})\hat{}$ a un support de la forme : $\bigcup_{j=1}^{k} \alpha_j' H_2^{\perp}$; le sous-groupe H peut donc être remplacé par le sous-groupe H_2 ; d'où

$$\gamma_1\gamma_o\mu_H = \eta_1 * \gamma_1\gamma_o\mu_H \text{ , où } \eta_1 = (\sum_{j=1}^{k} \bar{\alpha}_j')m_H .$$

Soit

$$\mu_H = \eta * \mu_H \text{ , où } \eta = (\sum_{j=1}^{k} \bar{\alpha}_j)m_H \text{ , et}$$

$\bigcup_{1}^{k} \alpha_j H^{\perp}$ est le support de $\hat{\mu}_H$ et de $\hat{\eta}$.

Nous nous proposons maintenant de démontrer que η est un multiple de μ_H . En effet :

$$(\alpha_j \mu_H) * m_H = (\sum_1^\infty C_j \delta_{x_j}) * m_H \quad .$$

Posons $\sigma = \sum_1^\infty C_j \delta_{x_j}$. Alors $|\hat{\sigma}| = |(\alpha_j \mu_H)\hat{}\,| \geq 1$ sur $H^\perp = (G/H)\hat{}$.
Par conséquent, si ρ désigne l'application canonique de G dans G/H et $\rho^*\sigma$ l'image de σ par l'application ρ , nous en déduisons que $\rho^*\sigma = \sum_{j=1}^\infty C_j \delta_{\rho(x_j)}$ est une mesure discrète dont la transformée de Fourier-Stieltjès est de module ≥ 1 ; elle est alors inversible, et son inverse est discret. Soit alors τ une mesure discrète sur G , vérifiant :

$$\rho^*\tau = (\rho^*\sigma)^{-1} \quad .$$

On en déduit : $\rho^*(\sigma * \tau) = \rho^*\sigma * \rho^*\tau = \delta_H$, où δ_H est la masse de Dirac à l'origine du groupe G/H , et par suite la mesure $\sigma * \tau$, en restriction au sous-groupe H , est de la forme $\sum_{j=1}^\infty d_j \delta_{y_j}$ avec $\sum_{j=1}^\infty d_j = 1$, et en restriction aux autres classes d'équivalence modulo H , de la même forme avec $\sum_{j=1}^\infty d_j = 0$. D'où :

$$m_H = \tau^*(\sigma * m_H) = \tau * (\alpha_j \mu_H) * m_H \quad .$$

on en déduit :

$$\bar{\alpha}_j \tau * \mu_H * \bar{\alpha}_j m_H = \bar{\alpha}_j m_H \quad .$$

Ainsi $\bar{\alpha}_j m_H$ est un multiple de μ_H , donc η aussi .

Il apparaît en fin de compte que les mesures μ_H et η sont des multiples l'une de l'autre. Leurs transformées de Gelfand ont donc le même support dans le spectre Δ de l'algèbre $M(G)$, tandis que 0 est isolé dans $\hat{\mu}_H(\Delta) \cup \{0\}$ et dans $\hat{\eta}(0) \cup \{0\}$. Soit alors $\varphi \in \Delta$:

$$\varphi(\mu_H + \delta_o - \eta) = 1 \quad \text{si} \quad \varphi(\mu_H) = \varphi(\eta) = 0$$

$$= \varphi(\mu_H) \quad \text{si} \quad \varphi(\mu_H) \neq 0 \quad .$$

Donc $\lambda = \mu_H + \delta_o - \eta$ est une mesure inversible et il est clair que :

$$\mu_H = \lambda * \eta \quad .$$

Ce qui démontre le théorème dans le cas où G est compact.

Supposons maintenant que G est un groupe abélien localement compact, et désignons par G^a son compactifié de Bohr. Nous noterons encore μ l'image de la mesure μ, dans $M(G^a)$, par l'homomorphisme canonique : $G \xrightarrow{a} G^a$. L'étude précédente sur les groupes compacts nous permet d'écrire :

$$\mu_H = \eta * \lambda \ ,$$

où $\eta = (\sum_{i=1}^{n} \bar{\gamma}_i) m_H$, λ inversible dans $M(G^a)$, et H est un sous-groupe fermé de G^a ; de plus η est un multiple de μ_H dans $M(G^a)$. Puisque μ_H est portée par G, $\hat{\mu}_H$ est alors continue sur Γ, et son support commun avec $\hat{\eta}$, $F = \bigcup_{1}^{n} \gamma_i H^\perp$, est ouvert dans Γ ; il est aussi fermé, car $\hat{\mu}_H$ vérifie (1).

Donc $(\gamma_i H^\perp)^- = (\gamma_i H^\perp)^- \subset F$, et F est une union finie de classes d'équivalence modulo $(H^\perp)^-$, tous d'intérieur non vide, puisque F est ouvert. Mais $H_o = [(H^\perp)^-]^\perp$, sous-groupe de G^a, est d'indice fini dans H ; d'où

$$\mu_H = \mu_{H_o} \ ,$$

et il est donc possible de remplacer H par H_o, autrement dit de considérer $H^\perp$ comme un sous-groupe ouvert de Γ ; ce qui implique que H est un sous-groupe compact de G (muni de sa topologie initiale) et par conséquent $\eta \in M(G)$.

De plus, η et μ_H sont multiples l'une de l'autre dans $M(G^a)$ et par suite leurs transformées de Gelfand ont même support sur le spectre Δ^a de $M(G^a)$; comme η est une mesure idempotente, on peut affirmer que zéro est isolé dans $\hat{\mu}_H(\Delta^a) \cup \{0\}$.

Donc $\mu_H + \delta_o - \eta$ est inversible dans $M(G^a)$, et son inverse a pour transformée de Fourier-Stieltjès $(\hat{\mu}_H + 1 - \hat{\eta})^{-1}$, qui est une fonction continue sur Γ. Le critère d'Eberlein implique alors que $(\mu_H + \delta_o - \eta)$ est aussi inversible dans $M(G)$ (Rudin [1, p.32]), il est clair que

$$\mu_H = \eta * (\mu_H + \delta_o - \eta) \ .$$

C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] - W. RUDIN - "Fourier Analysis on groups".
Inter-service 1962.

[2] - W. RUDIN - "Measure algebras on abelian groups".
Bull. Amer. Math. Soc., 65 (1959), 227-247.

[3] - P.J. COHEN - "On a conjecture of littlewood and iempotent measures".
Amer. J. Math. 82 (1960), 191-212.

[4] - I. AMEMIYA et T. ITO - "A simple proof of a theorem of P.J. COHEN".
B.A.M.S. 70 (1964), 774-776.

[5] - N. DUNFORD and J.T. SCHWARTZ - "Linear operators, I".
Pure and appl. Math, vol. 7, Interscience, 1958.

[6] - K. HOFFMAN - "Banach spaces of analytic functions".
Prentice-Hall series in modern Analysis, 1961.

[7] - J. WERMER - "Banach algebras and several complex variables".
Markham, 1971.

[8] - I. GLICKSBERG - "When $\mu_* L$ is closed ?".
Transactions of the american math. Soc.
Vol. 160, octobre 1971.

[9] - I. GLICKSBERG - "Fourier-Stieljes transforms, with small supports"
Illinois - Journal of Maths. 9 (1965).

[10] - I. GLICKSBERG - "Fourier-Stieljes transforms with an Isolated value. Conference on harmonic analysis".
Springer-Verlag, Vol. 266 (1971).

[11] - K de LEEUW et I. GLICKSBERG - "The decomposition of certain group representations".
J. d'Analyse Math ; SV (1965) - 135-192.

[12] - H. HELSON - "Note on harmonic Functions".
Proc. Am. Math. Soc. Vol.4 (1953).

[13] - N. Th. VAROPOULOS - "Measure algebras of a locally compact group".
Séminaire Bourbaki, 17e année, 1964-65, n° 282.

[14] - W. DRURY - "Sur les ensembles de Sidon".
C.R. Acad. Sc. Paris. 271 A (20 juillet 1970).

[15] - H. P. ROSENTHAL - "Projections onto translation Invariant subspaces of $L^p(G)$ ".
Doctoral Dissertations at Stanford University, June 1965.

--oo0oo--

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF
Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESRE Pierre	Métallurgie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale
	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mlle	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Sémélogie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paul	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique Industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique Industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique
Mme	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie médicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernhard	Physique

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des Fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GERMAIN Jean Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minéralogie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction Mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mlle	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUVARD Maurice	Mécanique des Fluides
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	COULOMB Max	Radiologie
	CROZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
	LACOUME Jean-Louis	Physique
Mme	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques
	LOISEAUX Jean-Marie	Physique Nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique Nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie Organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du Solide
	MICHOULIER Jean	Physique (I.U.T. "A")
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mlle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RENAUD Maurice	Chimie
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	SHOM Jean Claude	Chimie Générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques Appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine Interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWORNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	YACOUB Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme	BERIEL Hélène	Physiologie
Mme	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie

Fait le 30 Mai 1972

VU,

Grenoble, le

Le Président de la thèse,

C. CHABAUTY

VU, et permis d'imprimer

Grenoble, le

Le Président de l'Université scientifique et médicale,

M. SOUTIF